



Notes de cours du module Ma-525

Topologie et Calcul Différentiel

Licence de Mathématiques 3^{ème} année

Premier semestre 2017 — 2018

Version provisoire du 3 novembre 2017

Otared Kavian

Département de Mathématiques

Université de Versailles Saint Quentin

TABLE DES MATIÈRES

1. Topologie des nombres réels	3
1.1 Une brève introduction de la notion de nombre	3
1.2 Quelques propriétés des nombres rationnels	6
1.3 Défauts des nombres rationnels et définition de \mathbb{R}	11
1.4 Propriétés fondamentales à retenir	15
1.5 Notations de Landau	20
1.6 Ouverts et fermés de \mathbb{R}	26
1.7 Notion de compacité	36
1.8 Notion de connexité	42
1.9 Fonctions continues d'une variable réelle	47
1.10 Fonctions dérivables d'une variable réelle	58
1.11 Exercices	63
2. Topologie sur un ensemble	71
2.1 Ensembles ouverts et fermés	71
2.2	79
Notes biographiques	81
Bibliographie	83
Index	85

1

TOPOLOGIE DES NOMBRES RÉELS

CE chapitre est consacré à l'étude de « la droite réelle », c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels, ce qui nous préparera à l'étude des fonctions définies sur l'ensemble des nombres réels, et à celle de l'Analyse et de la topologie en général. Mais il serait peut-être utile de se poser la question, au moins une fois dans sa vie, ce que l'on entend par « nombre réel ». Bien que cette notion semble intuitive, en réalité, en donner une définition rigoureuse n'est pas immédiate. Dans un premier temps nous faisons un rapide tour d'horizon des diverses étapes de l'apparition de la notion de nombre, puis nous introduirons l'ensemble des nombres réels et nous étudierons ensuite les propriétés topologiques de la droite réelle.

1.1 UNE BRÈVE INTRODUCTION DE LA NOTION DE NOMBRE

On pourrait dire qu'à l'origine il n'y avait que les « nombres entiers », et que pour satisfaire divers besoins pratiques l'homo sapiens a été amené à étendre la notion de « nombre » avant d'arriver à celle de « nombre réel » puis à celle « nombre complexe ».

On peut raisonnablement penser, ou imaginer, que la notion de nombre entier est apparue très tôt dans l'histoire humaine, dès que les humains ont utilisé la notion d'énumération d'objets divers : *un arbre, deux tigres, trois fruits, deux personnes, trois enfants*, etc. Par abstraction, du fait de considérer des collections d'objets ayant le même nombre d'éléments, par exemple les deux collections contenant l'une trois fruits, et l'autre trois enfants, la notion du nombre *trois* est probablement apparue, ne

A savoir :

Si X et Y sont des ensembles non vides, on dit qu'une application $\varphi : X \rightarrow Y$ est :

- une **injection** si pour $x, x' \in X$ on a : $\varphi(x) = \varphi(x') \Rightarrow x = x'$;
- une **surjection** si pour tout $y \in Y$ on peut trouver $x \in X$ tel que $y = \varphi(x)$;
- une **bijection** si φ est une injection et une surjection.
- Intuitivement, s'il existe une bijection $\varphi : X \rightarrow Y$, alors X et Y ont *le même nombre* d'éléments.

1. Topologie des nombres réels

serait-ce que de manière intuitive, mais non théorisée. Ces *nombres entiers naturels* utilisés pour compter, pour *dénombrer* ou *énumérer* des objets, correspondent aux nombres que nous notons maintenant 1, 2, 3, 4, La notion du nombre, ou du chiffre, zéro, est apparue beaucoup plus tard, et son importance n'a été reconnue qu'à une période relativement récente : de ce point de vue il s'agit d'une notion moderne dans l'histoire de l'humanité.

Nous désignerons par \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels, en y incluant le nombre zéro, noté 0. L'ensemble des entiers naturels autres que zéro, sera noté \mathbb{N}^* . On peut construire l'ensemble des entiers naturels de manière rigoureuse et axiomatique, puis montrer que cet ensemble est unique, dans un sens que nous ne développerons pas dans ce cours.

L'ensemble des entiers naturels est muni des deux lois de composition internes, l'addition et la multiplication, notées respectivement

$$a + b \quad \text{et} \quad a \times b,$$

si $a, b \in \mathbb{N}$ (le produit, ou la multiplication de a et de b est souvent notée $a \cdot b$ ou simplement ab , lorsqu'il n'y a pas un risque de confusion). L'entier 0 est un élément neutre pour l'addition, et l'entier 1 est l'élément neutre pour la multiplication.

Une autre notion importante sur \mathbb{N} est celle de la relation d'ordre notée \leq : cette relation d'ordre est *compatible* avec l'addition et la multiplication, en ce sens que pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, sachant que $a \leq b$ et $c \leq d$ alors on a :

$$a + c \leq b + d \quad \text{et} \quad a \times c \leq b \times d.$$

Une propriété importante de \mathbb{N} , et de sa relation d'ordre, est la suivante : si $A \subset \mathbb{N}$ est une partie non vide, alors A possède un *plus petit élément*, c'est-à-dire qu'il existe $a_* \in A$ tel que pour tout $a \in A$ on ait $a_* \leq a$.

Une question naturelle qui apparaît est celle de la résolution d'équations du type suivant : $m, n, p \in \mathbb{N}$ étant donnés, ainsi que $q \in \mathbb{N}^*$, on souhaite trouver $x, y \in \mathbb{N}$ respectivement solutions des équations

$$x + m = n \quad \text{et} \quad q \times y = p.$$

A savoir :

- On dit qu'un ensemble A est (de cardinal) **fini** s'il existe un entier naturel $n \geq 1$ et une injection $\varphi : A \rightarrow \{1, \dots, n\}$.
- On dit qu'un ensemble A est (de cardinal) **infini** s'il existe $A_0 \subset A$ avec $A_0 \neq A$, et une injection $\varphi : A \rightarrow A_0$.
- On dit qu'un ensemble A est **dénombrable** s'il existe une injection $\varphi : A \rightarrow \mathbb{N}$.

§ 1.1 Une brève introduction de la notion de nombre

Il est très facile de se rendre compte que x existe si, et seulement si, on sait que $m \leq n$ (ce qui signifie que $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe). De même pour que y existe il faut et il suffit que p soit divisible par q .

Dans un premier temps, afin de rendre possible la résolution d'équations du type $x + m = n$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, on va *construire* de nouveaux « nombres » appelés les *entiers négatifs*, en associant à chaque nombre $m \in \mathbb{N}$, un nouveau *nombre* noté $-m$, appelé l'opposé de m , qui possède la propriété suivante : l'opposé de zéro est lui-même et $m + (-m) = 0$, et de plus l'opposé de $-m$ est par définition m . L'ensemble des nombres du type m ou $-m$, lorsque m parcourt \mathbb{N} sera noté \mathbb{Z} , et sera appelé l'ensemble des entiers relatifs. Ainsi $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif, unifié et intègre.

Ensuite on étend les notions d'addition, $+$, de multiplication, \times , et de relation d'ordre, \leq , à tous les éléments de \mathbb{Z} . Les éléments de \mathbb{N} correspondent précisément aux éléments $m \in \mathbb{Z}$ tels que $0 \leq m$: ces éléments sont aussi appelés les entiers positifs ou nuls. La relation d'ordre \leq est compatible avec l'addition sur \mathbb{Z} , mais elle est incompatible avec la multiplication. Néanmoins si $a, b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{N}$ alors

$$a \leq b \implies a \times c \leq b \times c.$$

Maintenant, pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$ donnés, l'équation $x + m = n$ admet une solution unique qui est précisément $x = n + (-m)$, que l'on note habituellement sous la forme $x = n - m$. Cependant, si on repose la question de la résolution de l'équation :

$$\text{trouver } y \in \mathbb{Z}, \text{ tel que } q \times y = p,$$

lorsque $q \neq 0$ et $p, q \in \mathbb{Z}$ sont donnés, on rencontre la même restriction que précédemment : l'équation ci-dessus admet une solution $y \in \mathbb{Z}$ si, et seulement, si p est divisible par q .

Afin de rendre possible la résolution de l'équation ci-dessus pour toutes les valeurs de $p, q \in \mathbb{Z}$ avec $q \neq 0$, on *construit* de nouveaux « nombres », représentés par des couples du type (p, q) : si q divise p alors ce « nombre » est, par définition, la solution de l'équation ci-dessus, et si ce n'est pas le cas on a une nouvelle notion de nombre. Sur ces couples de nombres entiers relatifs, tels que la deuxième composante est non nulle, on définit une relation d'équivalence par la définition suivante

$$(p, q) \equiv (p', q') \iff pq' - qp' = 0.$$

1. Topologie des nombres réels

En identifiant deux couples *équivalents* suivant cette définition, on obtient un ensemble que l'on note \mathbb{Q} , et que l'on appelle l'ensemble des *nombres rationnels*. On vérifie facilement que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, la *classe d'équivalence* du couple $(p, 1)$ peut être identifiée à l'entier relatif $p \in \mathbb{Z}$: cela permet d'identifier \mathbb{Z} à une partie de \mathbb{Q} . Sur ce nouvel ensemble on étend les définitions de l'addition et de la multiplication, en posant

$$(p, q) + (p', q') := (pq' + qp', qq'), \quad \text{et} \quad (p, q) \times (p', q') := (pp', qq').$$

En ce qui concerne la relation d'ordre \leq , on la définit sur \mathbb{Q} par

$$(p, q) \leq (p', q') \iff 0 \leq (pq' - qp')qq'.$$

On vérifie ensuite, avec un peu de patience, que les propriétés intéressantes de ces notions d'addition, de multiplication et de relation d'ordre, que l'on connaît sur \mathbb{Z} , existent aussi sur \mathbb{Q} .

Le lecteur attentif aura reconnu que les nombres *rationnels* (p, q) définis de cette manière correspondent aux fractions que l'on note $\frac{p}{q}$, ou bien p/q .

Une autre propriété intéressante de \mathbb{Q} est qu'il est **archimédien** :

1.1.1 Proposition. Si $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ et $\varepsilon > 0$, pour tout $R \in \mathbb{Q}$ tel que $R > 0$ il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\varepsilon > R$. Plus précisément il existe un unique entier $m \geq 0$ tel que $m\varepsilon \leq R < (m+1)\varepsilon$: cet entier m est appelé *partie entière de R/ε* et souvent noté $m = \lfloor R/\varepsilon \rfloor$ (et l'entier $(m+1)$ est noté $m+1 = \lceil R/\varepsilon \rceil$).

Au paragraphe suivant nous réunissons quelques propriétés importantes des nombres rationnels, et ce que l'ensemble \mathbb{Q} manque pour étudier de manière intéressante certains problèmes de géométrie et d'analyse.

1.2 QUELQUES PROPRIÉTÉS DES NOMBRES RATIONNELS

Si X est un ensemble non vide, une **suite d'éléments** de X est une application $u : \mathbb{N} \rightarrow X$. On a pris l'habitude de noter $u_n = u(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la suite u est notée par $(u_n)_{n \geq 0}$.

§ 1.2 Quelques propriétés des nombres rationnels

On peut considérer que l'entier n représente des *instants* (mesurés dans une certaine unité de temps), et que chaque u_n représente une observation à l'instant n dans l'ensemble X : d'ailleurs, dans beaucoup de situations, *l'étude d'une suite* est appelée *étude d'un système dynamique à temps discret*, et le but de cette étude est de comprendre ce que *fait* l'élément u_n lorsque *l'instant n tend vers l'infini*. On verra que pour pouvoir mener à bien une telle étude il est commode d'avoir une notion de *proximité* entre les éléments de X , notion que l'on représente très souvent par la notion de distance.

A savoir :

On reviendra sur cette notion plus tard, mais d'ores et déjà il est bon de la connaître. Si X est un ensemble non vide, on dit que $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ est une distance sur X si pour tous $x, y, z \in X$:

- (i) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (ii) $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Sur \mathbb{Q} on dispose d'une notion de **distance** définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, \quad \text{dist}(x, y) := |x - y|,$$

où, comme on le sait, la valeur absolue de $x - y$ est définie par $|x - y| = x - y$ si $y \leq x$, et $|x - y| = y - x$ si $x \leq y$.

Si $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante et $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite de X , la suite définie par $v_k := u_{\varphi(k)}$ pour tout $k \geq 0$ est une nouvelle suite, appelée suite extraite de $(u_n)_n$ par l'application φ . Il est coutumier de noter $n_k := \varphi(k)$, de telle sorte que la suite extraite est notée $(u_{n_k})_{k \geq 0}$.

Cela dit, pour le moment, nous nous intéresserons aux suites à valeurs dans l'ensemble des nombres rationnels \mathbb{Q} . La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ dont tous les termes sont égaux, par exemple $u_n = \ell \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \geq 0$, est la suite constante égale à ℓ .

Voici quelques définitions concernant les suites de rationnels : lorsque nous aurons défini les *nombres réels*, le lecteur est invité à adapter les définitions qui suivent aux suites de nombres réels.

- ▷ Si $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$ et $u := (u_n)_n$ et $v := (v_n)_n$ sont deux suites rationnelles, la suite $z := \lambda u + \mu v$ est définie par $z_n := \lambda u_n + \mu v_n$ pour tout $n \geq 0$. De même le produit de u et de v est la suite $w := uv$ définie par $w_n := u_n v_n$. (De manière abrégée, en désignant par $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$ l'ensemble des suites rationnelles, alors $(\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{Q}), +, \times)$ est un anneau commutatif et $(\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{Q}), +, \cdot, \mathbb{Q})$ est un espace vectoriel sur le corps \mathbb{Q}).

1. Topologie des nombres réels

- ▷ On dit qu'une suite $(u_n)_n$ est croissante si $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$ (on dit qu'elle est strictement croissante si $u_n < u_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$). Si la suite définie par $v_n := -u_n$ est croissante (ou strictement croissante) on dira que la suite $(u_n)_n$ est décroissante (ou strictement décroissante). Lorsqu'on parle de suite monotone, on entend par là que ladite suite est ou bien croissante, ou bien décroissante ; le notion de suite strictement monotone se définit de manière analogue.
- ▷ On dit qu'une suite $(u_n)_n$ est minorée, s'il existe un rationnel $m \in \mathbb{Q}$ tel que pour tout $n \geq 0$ on ait $m \leq u_n$. On vérifiera que la somme de deux suites minorées est minorée.
- ▷ On dit qu'une suite $(u_n)_n$ est majorée, s'il existe un rationnel $M \in \mathbb{Q}$ tel que pour tout $n \geq 0$ on ait $u_n \leq M$. On vérifiera que la somme de deux suites majorées est majorée.
- ▷ On dit qu'une suite $(u_n)_n$ est bornée, s'il existe un rationnel $R > 0$ tel que pour tout $n \geq 0$ on ait $-R \leq u_n \leq R$. On vérifiera que la somme, ainsi que le produit, de deux suites bornées sont bornées.
- ▷ On dira qu'une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de \mathbb{Q} converge vers zéro si la propriété suivante est satisfaite

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \exists n_k \in \mathbb{N}, \quad \text{tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \\ n \geq n_k \implies \text{dist}(u_n, 0) = |u_n| \leq \frac{1}{k}. \end{array} \right.$$

En réalité, on peut remplacer le nombre $1/k$ par 2^{-k} , ou plus généralement par les termes d'une suite positive a_k telle que a_k est aussi petit que l'on veut en prenant k assez grand, ou encore par un quelconque nombre positif $\varepsilon \in \mathbb{Q}$: naturellement, dans ce dernier cas, l'expression « $\forall k \in \mathbb{N}^*$ » sera remplacée par « $\forall \varepsilon > 0$ ». Plus précisément, en désignant par \mathbb{Q}_+^* l'ensemble des rationnels strictement positifs, la convergence vers zéro de $(u_n)_n$ peut s'exprimer aussi par

Est-ce que le produit de deux suites minorées est une suite minorée ? Et le produit de deux suites majorées est-ce une suite majorée ?

On vérifiera que si la suite $(u_n)_n$ tend vers zéro et si la suite $(v_n)_n$ est bornée, alors le produit $(u_n v_n)_n$ tend vers zéro.

§ 1.2 Quelques propriétés des nombres rationnels

$$\begin{cases} \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \\ n \geq n_0 \implies \text{dist}(u_n, 0) = |u_n| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

- ▷ On dira qu'une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{Q}$ si la suite $(u_n - \ell)_{n \geq 0}$ converge vers zéro : on dira alors que ℓ est la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$, et on dira aussi que la suite en question est convergente (on dit aussi que $(u_n)_{n \geq 0}$ tend vers ℓ). Cela signifie donc

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists n_k \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \\ n \geq n_k \implies \text{dist}(u_n, \ell) = |u_n - \ell| \leq \frac{1}{k}. \end{cases}$$

On écrit alors $u_n \rightarrow \ell$ lorsque $n \rightarrow \infty$, ou encore $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

- ▷ Si $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite et $a \in \mathbb{Q}$, on dit que a est une **valeur d'adhérence** de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$, s'il existe une sous-suite $(u_{n_k})_{k \geq 0}$ qui converge vers a . On vérifiera qu'une suite qui converge vers ℓ admet une seule valeur d'adhérence.

Un inconvénient de la définition de la notion de suite convergente est qu'il faut connaître, ou deviner, la limite ℓ de la suite en question avant de pouvoir en vérifier la convergence vers cette limite... Pour contourner cette difficulté on utilise la notion, très importante, de suite de Cauchy¹ :

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite rationnelle possédant une unique valeur d'adhérence $\ell \in \mathbb{Q}$. Est-ce que la suite converge vers ℓ ?

1.2.1 Définition. On dit qu'une suite $(x_n)_n$ de \mathbb{Q} est une suite de Cauchy dans \mathbb{Q} si la propriété suivante est satisfaite :

$$(1.2.1) \quad \begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists n_k \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}, \\ n \geq n_k \implies |x_{n+j} - x_n| \leq \frac{1}{k}. \end{cases}$$

La propriété (1.2.1) est appelée le critère de Cauchy (pour la convergence des suites). On peut vérifier facilement qu'une suite convergente est une suite de Cauchy : en effet si $(x_n)_n$ est une suite qui converge vers ℓ , l'entier $k \geq 1$ étant donné, on choisit $n_k \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_k$ on ait $|x_n - \ell| \leq (2k)^{-1}$: alors si $j \geq 0$ on a

¹ Augustin Louis Cauchy, mathématicien français né à Paris le 21 août 1789, mort à Sceaux (près de Paris) le 23 mai 1857.

1. Topologie des nombres réels

$$|x_{n+j} - x_n| \leq |x_{n+j} - \ell| + |\ell - x_n| \leq \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k}$$

ce qui signifie précisément que $(x_n)_n$ satisfait le critère de Cauchy.

Une autre propriété intéressante des suites de Cauchy est le fait qu'elles ne peuvent pas avoir plus d'une valeur d'adhérence, et si elles possèdent une valeur d'adhérence, alors elles y convergent (noter néanmoins qu'une suite de Cauchy de rationnels peut ne pas avoir de valeur d'adhérence). En effet si $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy et $a \in \mathbb{Q}$ est une valeur d'adhérence de cette suite, cela signifie qu'il existe une sous-suite $(u_{n_j})_{j \geq 0}$ qui converge vers a . Un entier $k \geq 1$ étant donné, on peut trouver des entiers $j_0 \geq 0$ et $N_0 \geq 0$ tels que pour $j \geq j_0$ d'une part et $n, m \geq N_0$ d'autre part, on ait

$$|u_{n_j} - a| \leq \frac{1}{2k} \quad \text{et} \quad |u_n - u_m| \leq \frac{1}{2k}.$$

On en conclut donc que si $m \geq \max(n_{j_0}, N_0)$ et $n \geq N_0$ on a

$$|u_n - a| \leq |u_n - u_m| + |u_m - a| \leq \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k},$$

ce qui signifie que toute la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers a , en particulier a est sa seule valeur d'adhérence.

Pour bien saisir la délicate différence entre le critère de Cauchy et la définition de la convergence d'une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ vers un nombre $\ell \in \mathbb{Q}$, il peut être utile de les répéter et de les mettre côte à côte. Ainsi la convergence de $(x_n)_n$ vers ℓ signifie que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver un entier $n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 0$ tel que tous les termes x_n d'indice $n \geq n_0$ soient compris entre $\ell - \varepsilon$ et $\ell + \varepsilon$. D'un autre côté, dire que $(x_n)_n$ satisfait le critère de Cauchy signifie que tous les termes x_n d'indice $n \geq n_0$ sont compris entre $x_{n_0} - \varepsilon$ et $x_{n_0} + \varepsilon$. Autrement dit nous avons remplacé les bornes $\ell \pm \varepsilon$ par $x_{n_0} \pm \varepsilon$. Comme on vient de le voir plus haut, si la limite ℓ est connue, alors le critère de Cauchy est satisfaite mais, dans le cadre des nombres rationnels \mathbb{Q} , en général la réciproque n'est pas vraie.

Il n'est pas difficile de montrer que, dans l'ensemble des nombres rationnels \mathbb{Q} , si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites de Cauchy et $\lambda \in \mathbb{Q}$, alors les deux suites $(z_n)_n$ définie par $z_n := \lambda u_n + v_n$ et $w_n := u_n v_n$ sont aussi des suites de Cauchy. Par exemple, vérifions que $(w_n)_n$ est une suite de Cauchy. Commençons par vérifier qu'une suite de Cauchy, par exemple $(u_n)_n$, est bornée : en effet en

prenant $k = 1$ dans la Définition des suites de Cauchy, on sait qu'il existe

§ 1.3 Défauts des nombres rationnels et définition de \mathbb{R}

$n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $j \geq 0$ et $n \geq n_1$ on ait $|u_{j+n} - u_n| \leq 1$. En prenant $n = n_1$, on en déduit que pour tout $m := j + n_1 \geq n_1$ on a $|u_m| \leq 1 + |u_{n_1}|$. par conséquent, si on pose $R := 1 + \max\{|u_k| ; 0 \leq k \leq n_1\}$, on a bien $|u_n| \leq R$ pour tout $n \geq 0$.

Ensuite, soit $R > 0$ un nombre (rationnel, puisque pour le moment nous n'en avons pas d'autres...) tel que $\max(|u_n|, |v_n|) \leq R$ pour tout $n \geq 0$. Si $k \geq 1$ est donné, on écrit :

$$w_{n+j} - w_n = u_{n+j}(v_{n+j} - v_n) + (u_{n+j} - u_n)v_n,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} |w_{n+j} - w_n| &\leq |u_{n+j}(v_{n+j} - v_n)| + |(u_{n+j} - u_n)v_n| \\ &\leq R(|v_{n+j} - v_n| + |u_{n+j} - u_n|). \end{aligned}$$

Puisque les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont de Cauchy, il est clair qu'il existe $n_k \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_k$ et tout $j \geq 0$ l'on ait en même temps

$$|v_{n+j} - v_n| \leq \frac{1}{2kR} \quad \text{et} \quad |u_{n+j} - u_n| \leq \frac{1}{2kR}.$$

On en déduit donc que $|w_{n+j} - w_n| \leq 1/k$, c'est-à-dire que $(w_n)_n$ est une suite de Cauchy. D'ailleurs, en suivant la même procédure, on peut montrer que le produit de deux suites convergentes $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ est convergente et que la limite du produit est le produit des limites : de fait on a

Vérifier que si $\lambda \in \mathbb{Q}$ et si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites convergentes (resp. de Cauchy) alors la suite $(z_n)_n$ définie par $z_n := \lambda u_n + v_n$ est aussi une suite convergente (resp. de Cauchy).

$$(1.2.2) \quad \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n v_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} v_n \right), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + \lim_{n \rightarrow \infty} v_n. \end{cases}$$

1.3 DÉFAUTS DES NOMBRES RATIONNELS ET DÉFINITION DE \mathbb{R}

L'ensemble des nombres rationnels \mathbb{Q} a quelques *défauts*, dont certains ne peuvent pas être contournés par des procédés purement algébriques. L'un des défauts est dû au fait que certaines équations polynômiales à coefficients entiers

1. Topologie des nombres réels

n'ont aucune solution rationnelle, même si le polynôme en question prend aussi bien des valeurs négatives que positives : par exemple si $P(x) := x^2 - 2$, on a bien $P(0) < 0$ et $P(2) > 0$, et pour tout entier $n \geq 1$ on peut trouver des nombres rationnels a_n et b_n tels que

$$\frac{-1}{n} < P(a_n) < 0 < P(b_n) < \frac{1}{n},$$

mais l'équation $P(x) = 0$ n'a pas de solution rationnelle, alors qu'on s'attendrait *intuitivement* à en trouver (mais en fait il n'y a aucune raison *naturelle* qui justifierait cette attente... Voir plus loin le théorème des valeurs intermédiaires). Tout se passe comme s'il y avait des *trous* entre les nombres rationnels, comme il y a des *trous* entre les nombres entiers, mais ces *trous* seraient aussi rapprochés que l'on veut les uns des autres (plus exactement il s'agit de *coupures*).

On peut *ajouter* à \mathbb{Q} les racines de tous les polynômes à coefficients entiers, un peu comme ce que nous avons fait pour construire \mathbb{Q} à partir de \mathbb{Z} , et ce dernier à partir de \mathbb{N} . On obtient ainsi l'ensemble \mathbb{A} des **nombres algébriques**.

Naturellement on sait que $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont des nombres algébriques. Vérifier *à la main* que $a := \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est aussi un nombre algébrique, en trouvant un polynôme P , de degré minimal, à coefficients entiers, tel que $P(a) = 0$.

Mais cela ne résout pas toutes les difficultés avec les nombres rationnels. Par exemple en ce qui concerne la relation d'ordre \leq : en effet, alors que toute partie bornée de \mathbb{N} , ou de \mathbb{Z} , admet une borne inférieure et une borne supérieure dans \mathbb{N} , ou dans \mathbb{Z} (et plus précisément un plus petit élément et un plus grand élément), l'ensemble \mathbb{Q} ne possède pas cette propriété. Par exemple, soient la suite de rationnels $(u_n)_n$ et l'ensemble A définis de la manière suivante : on pose $u_0 = 1$, puis pour $n \geq 0$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!} \quad \text{et} \quad A := \left\{ x \in \mathbb{Q} ; \exists n \in \mathbb{N}, |x| \leq u_n \right\}.$$

Alors on peut montrer que A est borné mais n'a pas de borne inférieure, ni de borne supérieure, dans l'ensemble des nombres rationnels, ce qui semble être un *défaut*.

Une autre difficulté avec les nombres rationnels est le fait que la suite $(u_n)_n$ définie ci-dessus ne converge pas, alors qu'on peut vérifier facilement qu'il s'agit d'une suite de Cauchy. Ce *défaut* est en réalité liée de manière intime au défaut précédent.

§ 1.3 Défauts des nombres rationnels et définition de \mathbb{R}

Il y a deux manières de *rajouter des éléments* à l'ensemble \mathbb{Q} pour supprimer ces défauts (mais elles donnent cependant le même résultat). L'une est l'approche des *coupures de Dedekind*¹, qui est adaptée à la structure de l'ordre \leq . L'autre approche, due à Charles Méray², ainsi qu'à Eduard Heine³, est l'utilisation des suites de Cauchy : ce procédé peut être utilisé dans des espaces métriques quelconques. Dans le cas des nombres rationnels, le procédé est le suivant : on définit d'abord une notion de relation d'équivalence \mathcal{R} sur l'ensemble des suites de Cauchy en disant que si $u := (u_n)_n$ et $v := (v_n)_n$ sont des suites de Cauchy de nombres rationnels, alors

$$u \mathcal{R} v \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 0.$$

Ensuite, en considérant les classes d'équivalence selon \mathcal{R} parmi les suites de Cauchy, on construit un ensemble que l'on notera \mathbb{R} , l'ensemble des **nombres réels**. Intuitivement, on voit que si une suite de Cauchy $(u_n)_n$ de rationnels converge vers $\ell \in \mathbb{Q}$, sa classe d'équivalence est précisément la suite constante égale à ℓ . Sinon on lui associe une *limite* ℓ qui n'est plus un nombre rationnel, mais une classe d'équivalence de suites de Cauchy.

Naturellement, il faudra montrer que sur cet ensemble \mathbb{R} on peut étendre les notions d'addition, de multiplication et de relation d'ordre, tout en conservant les propriétés respectives de ces notions que l'on avait dans l'ensemble \mathbb{Q} . Cela est possible et, essentiellement, la démarche n'est pas différente de celle qui consiste à construire \mathbb{Q} ou, encore plus simplement, l'ensemble $\mathbb{Z}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ des entiers modulo p , lorsque $p \geq 2$ est un nombre premier (dans ce dernier exemple c'est seulement les définitions de l'addition et la multiplication qui sont étendues).

On étend la notion de relation d'ordre \leq à \mathbb{R} , en définissant d'abord l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls : un nombre $\ell \in \mathbb{R}$, défini comme limite d'une suite de Cauchy $(u_n)_n$ de rationnels est dit **positif**, et on écrira $\ell > 0$, s'il existe un entier $k \geq 1$ et un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq n_0$ on ait

¹ Julius Wilhelm Richard Dedekind, mathématicien allemand, né le 6 octobre 1831 à Braunschweig (Allemagne), mort le 12 février 1916 à Braunschweig (Allemagne).

² Hugues Charles Robert Méray, mathématicien français, né le 12 novembre 1835 à Chalon-sur-Saône (France), mort le 2 février 1911 à Dijon (France).

³ Heinrich Eduard Heine, mathématicien allemand, né le 16 mars 1821 à Berlin (Allemagne), mort le 21 octobre 1881 à Halle (Allemagne).

1. Topologie des nombres réels

$u_n \geq 1/k$. Ensuite, pour $x, y \in \mathbb{R}$, la relation $x \leq y$ est définie comme étant équivalente à « $x = y$ ou $y - x > 0$ ».

Pour terminer, voici une définition formelle et précise de \mathbb{R} , qui utilise les notions algébriques d'anneau, d'idéal, d'idéal maximal, de corps, et le fait que le quotient d'un anneau par un idéal maximal est un corps :

1.3.1 Théorème et définition. Soit $\mathcal{C} := \mathcal{C}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$ L'ensemble des suites de Cauchy à valeurs rationnelles, et soit \mathcal{C}_0 l'ensemble des éléments de \mathcal{C} qui tendent vers zéro. Alors

- 1) \mathcal{C} muni de l'addition, $+$, et de la multiplication, \times , entre suites est un anneau commutatif.
- 2) \mathcal{C}_0 est un idéal maximal de \mathcal{C} .

Alors l'ensemble $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$ des classes d'équivalence modulo \mathcal{C}_0 est un corps commutatif, que l'on notera \mathbb{R} .

Le lecteur intéressé par la preuve de ce résultat pourra se reporter à l'[Exercice 1.1](#) et aux références bibliographiques qui sont données à la fin de ces notes de cours.

Néanmoins, pour ce qui suit, on retiendra surtout les propriétés fondamentales suivantes. Par définition, ou par construction, tout nombre réel x peut être approché, avec autant de précision que l'on veut, par un nombre rationnel. Plus précisément,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \quad r_1 - \varepsilon \leq x \leq r_2 + \varepsilon.$$

Par ailleurs, on peut montrer que toute suite de Cauchy de réels est convergente dans \mathbb{R} . Ces deux propriétés sont résumées dans l'énoncé suivant.

1.3.2 Théorème. L'ensemble \mathbb{R} , défini ci-dessus, muni de l'addition notée $+$, de la multiplication notée \times , et de la relation d'ordre notée \leq , est un corps commutatif totalement ordonné. Par ailleurs

- 1) \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , c'est-à-dire que tout $x \in \mathbb{R}$ est limite d'une suite de rationnels.
- 2) \mathbb{R} est **complet**, c'est-à-dire que toute suite de Cauchy de réels possède une limite dans \mathbb{R} .

§ 1.4 Propriétés fondamentales à retenir

1.4 PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES À RETENIR

Les définitions de suite croissante, décroissante, bornée s'étendent de manière claire aux suites réelles. Un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est dit un intervalle, si à chaque fois que $x_0, x_1 \in A$ et $x_0 \leq x_1$, si $x \in \mathbb{R}$ vérifie $x_0 \leq x \leq x_1$, alors on a aussi $x \in A$ (on verra plus loin que tout intervalle selon cette définition coïncide avec l'un des types d'intervalles introduits ci-dessous).

Si $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$, on définit les intervalles fermé $[a, b]$, ouvert (a, b) qui est parfois noté $]a, b[$, ouvert à gauche $(a, b]$, ouvert à droite $[a, b)$ par

$$\begin{aligned} [a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} ; a \leq x \leq b\}, \\ (a, b) &:=]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} ; a < x < b\} \\ (a, b] &:=]a, b] := \{x \in \mathbb{R} ; a < x \leq b\}, \\ [a, b) &:= [a, b[:= \{x \in \mathbb{R} ; a \leq x < b\}. \end{aligned}$$

On dit que a et b sont les extrémités de ces intervalles, et que la longueur de l'intervalle d'extrémités a et b est $b - a$.

On dit qu'une suite $(x_n)_n$ tend vers « plus l'infini » si

$$\forall k \geq 1, \quad \text{il existe un entier } n_k \geq 0 \text{ tel que } n \geq n_k \implies x_n \geq k.$$

(Comparer avec la définition de la convergence d'une suite vers zéro). Dans ce cas on écrit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty.$$

On dit qu'une suite $(x_n)_n$ tend vers « moins l'infini » si la suite $(-x_n)_n$ tend vers plus l'infini :

$$\forall k \geq 1, \quad \text{il existe un entier } n_k \geq 0 \text{ tel que } n \geq n_k \implies x_n \leq -k,$$

on écrit alors $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

L'ensemble \mathbb{R} est parfois noté $(-\infty, +\infty)$ ou $] -\infty, +\infty[$, alors que $(-\infty, b]$ désigne l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq b$, et de manière analogue on définit les ensembles $(-\infty, b)$, et $[a, +\infty)$ ainsi que $(a, +\infty)$.

Outre la propriété fondamentale de \mathbb{R} d'être complet, les propriétés suivantes de \mathbb{R} sont à retenir.

1. Topologie des nombres réels

1.4.1 Définition et Théorème. Deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ de \mathbb{R} sont dites *adjacentes* si

$$u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n, \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0.$$

Alors les deux suites convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. En particulier, si $(x_n)_n$ est une suite telle que pour un entier fixé n_0 , et pour tout $n \geq n_0$ on a : $u_n \leq x_n \leq v_n$, alors $(x_n)_n$ converge aussi vers ℓ .

En effet il suffit de vérifier par exemple que $(u_n)_n$ est de Cauchy : si $k \geq 1$ est donné, on sait qu'il existe $n_k \geq 0$ tel que si $n \geq n_k$ on ait $0 \leq v_n - u_n \leq 1/k$. Alors pour tous $j \geq 0$ et $n \geq n_k$ on a

$$0 \leq u_{n+j} - u_n \leq v_{n+j} - u_n \leq v_n - u_n \leq \frac{1}{k},$$

ce qui montre que $(u_n)_n$ est de Cauchy. Par conséquent, \mathbb{R} étant complet, $(u_n)_n$ converge vers une certaine limite $\ell \in \mathbb{R}$, ainsi que $(v_n)_n$, et on a $u_n \leq \ell \leq v_n$ pour tout $n \geq 0$. Pour ce qui concerne la suite $(x_n)_n$, il suffit de remarquer que pour $n \geq n_0$ on a $0 \leq x_n - u_n \leq v_n - u_n$ et que par conséquent $x_n - u_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, c'est-à-dire que $(x_n)_n$ a aussi pour limite ℓ . \square

Si $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante et $u := (u_n)_n$ est une suite de \mathbb{R} , la suite définie par $u \circ \varphi = (u_{\varphi(k)})_k$ est appelée la **suite extraite** de u par φ . Souvent, en notant $n_k := \varphi(k)$ la suite extraite est notée $(u_{n_k})_k$.

Rappelons (voir page 9) que $a \in \mathbb{R}$ est une **valeur d'adhérence** de la suite $(u_n)_n$ s'il existe une suite extraite $(u_{n_k})_k$ qui converge vers a .

Le résultat suivant, appelé propriété de Bolzano¹-Weierstrass², exprime une propriété très importante de \mathbb{R} , celle de sa *compacité locale*, notion topologique que nous développerons un peu plus loin.

1.4.2 Théorème (Bolzano-Weierstrass). Toute suite réelle bornée $(x_n)_n$ admet au moins une valeur d'adhérence.

¹ Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano, mathématicien tchèque, né le 5 octobre 1781 à Prague (Bohême, empire autrichien des Habsbourgs, maintenant en République Tchéque), mort le 18 décembre 1848 à Prague.

² Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, mathématicien allemand, né le 31 octobre 1815 à Ostenfelde (Westphalie, Allemagne), mort le 19 février 1897 à Berlin (Allemagne).

§ 1.4 Propriétés fondamentales à retenir

Démonstration. La preuve est basée sur un argument de dichotomie, qui est souvent utilisé dans d'autres situations analogues. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$, tels que pour tout $n \geq 0$ on ait $x_n \in [a, b]$. On pose $a_0 := a$ et $b_0 := b$, puis pour $k \geq 0$, sachant que a_k et b_k sont connus, et que l'intervalle $[a_k, b_k]$ contient une infinité de termes de la suite $(x_n)_n$, on construit a_{k+1} et b_{k+1} par le procédé suivant : on pose $c_k := (a_k + b_k)/2$ et

- ▷ si l'intervalle $[a_k, c_k]$ contient une infinité de termes de la suite $(x_n)_n$, on pose $a_{k+1} := a_k$ et $b_{k+1} := c_k = (a_k + b_k)/2$;
- ▷ sinon c'est l'intervalle $[c_k, b_k]$ qui contient une infinité de termes de la suite $(x_n)_n$: on pose alors $a_{k+1} := c_k = (a_k + b_k)/2$, puis $b_{k+1} := b_k$.

On voit ainsi que $a_k \leq a_{k+1} \leq b_{k+1} \leq b_k$ et que $b_{k+1} - a_{k+1} = (b_k - a_k)/2$, et qu'en plus, pour tout $k \geq 0$, l'intervalle $[a_k, b_k]$ contient une infinité d'éléments de la suite $(x_n)_n$. On en déduit que $b_k - a_k = 2^{-k}(b - a)$, ce qui montre que les deux suites $(a_k)_k$ et $(b_k)_k$ sont adjacentes et convergent donc vers une limite $\ell \in [a, b]$. Or par construction de ces suites, pour tout $k \geq 0$ on sait qu'il existe au moins un terme x_{n_k} de la suite $(x_n)_n$ tel que $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$. On en déduit que $x_{n_k} \rightarrow \ell$, lorsque $k \rightarrow \infty$, autrement dit que ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_n$. \square

1.4.3 Théorème. *Tout sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ non vide et majoré possède une borne supérieure $\beta \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire tel que*

- (i) β est un majorant de A ;
- (ii) pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a \in A$ tel que $\beta - \varepsilon \leq a \leq \beta$.

Démonstration. On remarquera que la preuve qui va suivre est analogue à l'argument de dichotomie que nous avons utilisé pour prouver le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Soit B l'ensemble des majorants de A . Comme ces deux ensembles sont non vides, on peut y fixer deux éléments $a_0 \in A$ et $b_0 \in B$, puis on pose $c_0 := (a_0 + b_0)/2$. Ensuite, si pour un entier $n \geq 0$ les éléments $a_n \in A$ et $b_n \in B$ sont connus, on construit $a_{n+1} \in A$ et $b_{n+1} \in B$ par le procédé suivant : on pose $c_n := (a_n + b_n)/2$, puis

- ▷ Si $c_n \in B$, alors on pose

1. Topologie des nombres réels

$$a_{n+1} := a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} := c_n := \frac{a_n + b_n}{2} ;$$

On notera que

$$a_{n+1} \leq b_{n+1}, \quad \text{et} \quad 0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq 2^{-1}(b_n - a_n).$$

- ▷ Si $c_n \notin B$, cela signifie que c_n n'est pas un majorant de A , c'est-à-dire qu'il existe $a_{n+1} \in A$ tel que $c_n < a_{n+1}$. Alors on pose $b_{n+1} := b_n$. On vérifie que dans ce cas aussi on a

$$a_{n+1} \leq b_{n+1}, \quad \text{et} \quad 0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq 2^{-1}(b_n - a_n).$$

(Cependant il faut faire attention au fait suivant : dire que $c_n \notin B$, ne signifie pas que c_n appartient à A).

On en conclut facilement que $0 \leq b_n - a_n \leq 2^{-n}(b_0 - a_0)$, et ainsi les deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes et convergent vers une limite que nous noterons β .

Vérifions que β est un majorant de A , c'est-à-dire que $\beta \in B$: si cela n'était pas le cas, il existerait $a \in A$ tel que $\beta < a$. Or la suite $(b_n)_n$ est décroissante et converge vers β . Par conséquent, en posant $\varepsilon := (a - \beta)/2$ on peut trouver n_0 assez grand tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $\beta \leq b_n \leq \beta + \varepsilon < a$: cela contredirait le fait que b_n est un majorant de A . Cela montre que β est bien un majorant de A .

Il nous reste à vérifier maintenant que β est la borne supérieure de A , c'est-à-dire que la propriété (ii) du théorème est satisfaite. Pour cela observons que, si $\varepsilon > 0$ est donné, la suite $(a_n)_n$ étant croissante et convergeant vers β , il existe $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $\beta - \varepsilon \leq a_n \leq \beta$. Comme $a_n \in A$, la propriété (ii) est établie, et le théorème est prouvé. \square

Si A est un ensemble non vide et minoré, en appliquant le résultat précédent à l'ensemble $-A := \{-a ; a \in A\}$, on a :

1.4.4 Théorème. *Tout sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ non vide et minoré possède une borne inférieure $\alpha \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire tel que*

- (i) α est un minorant de A ;
- (ii) pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a \in A$ tel que $\alpha \leq a \leq \alpha + \varepsilon$.

§ 1.4 Propriétés fondamentales à retenir

Si A est borné et non vide, alors il possède une borne inférieure α et une borne supérieure β . On écrit

$$\alpha = \inf A = \inf \{a ; a \in A\}, \quad \beta = \sup A = \sup \{a ; a \in A\},$$

Lorsque A n'est pas minoré on convient de poser $\inf A := -\infty$, et s'il n'est pas majoré on pose $\sup A := +\infty$.

1.4.5 Théorème. *Toute suite $(x_n)_n$ monotone et bornée est convergente.*

Plus précisément, en posant

$$\alpha := \inf_{n \geq 0} x_n \quad \text{et} \quad \beta := \sup_{n \geq 0} x_n,$$

*alors la suite converge vers β si elle est croissante (on écrit parfois $x_n \uparrow \beta$),
alors que si elle est décroissante elle converge vers α (on écrit parfois $x_n \downarrow \alpha$).*

Démonstration. Supposons, par exemple, que $(x_n)_n$ est croissante et majorée, et considérons l'ensemble $A := \{x_n ; n \geq 0\}$. Cet ensemble est borné et possède en particulier une borne supérieure $\beta \in \mathbb{R}$. Par définition de la borne supérieure, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que $\beta - \varepsilon \leq x_{n_0} \leq \beta$. Comme la suite est croissante, pour tout $n \geq n_0$ on a $\beta - \varepsilon \leq x_{n_0} \leq x_n \leq \beta$, ce qui signifie que $0 \leq \beta - x_n = |\beta - x_n| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$, c'est-à-dire que $x_n \rightarrow \beta$. \square

Une notion importante est celle de la *limite inférieure* et de *limite supérieure* associées à une suite réelle bornée $(u_n)_n$. Soient les deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ définies par

$$(1.4.1) \quad a_n := \inf \{u_k ; k \geq n\}, \quad b_n := \sup \{u_k ; k \geq n\}.$$

Comme l'ensemble $A_n := \{u_k ; k \geq n\}$ décroît lorsque n croît, c'est-à-dire que $A_{n+1} \subset A_n$, on voit facilement que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont bornées et que $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Par conséquent la suite $(a_n)_n$ converge vers une limite $a_* \in \mathbb{R}$, et la suite $(b_n)_n$ converge vers une limite b_* et on a naturellement $a_* \leq b_*$. Si la suite $(u_n)_n$ n'est pas majorée, alors on posera $b_* := +\infty$, et si elle n'est pas minorée on posera $a_* := -\infty$. On a ainsi les deux notions de limite inférieure et de limite supérieure, notées respectivement $\underline{\lim}$ et $\overline{\lim}$ (on écrit aussi \liminf et \limsup).

1. Topologie des nombres réels

1.4.6 Définition et théorème. Si $(u_n)_n$ est une suite réelle, on définit les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ par (1.4.1), en convenant de poser $a_n = -\infty$ si la suite $(u_n)_n$ n'est pas minorée, et $b_n = +\infty$ si $(u_n)_n$ n'est pas majorée. Alors la limite inférieure, notée $\underline{\lim}$ et la limite supérieure, notée $\overline{\lim}$, de $(u_n)_n$ sont définies par

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n &:= a_* := \sup_{n \geq 0} a_n = \sup_{n \geq 0} \inf_{k \geq n} u_k, \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n &:= b_* := \inf_{n \geq 0} b_n = \inf_{n \geq 0} \sup_{k \geq n} u_k.\end{aligned}$$

Alors $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n$ et la limite inférieure de $(u_n)_n$ est la plus petite valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$, alors que la limite supérieure est sa plus grande valeur d'adhérence.

Une suite bornée $(u_n)_n$ est convergente si et seulement si elle possède une seule valeur d'adhérence, c'est-à-dire si $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n$.

1.4.7 Remarque. En réalité on peut montrer que la propriété « \mathbb{R} est complet » du Théorème 1.3.2 est équivalente à l'un quelconque des résultats sur les suites adjacentes, Théorème 1.4.1, ou la propriété de Bolzano-Weierstrass, Théorème 1.4.2, ou l'existence de la borne supérieure, Théorème 1.4.3. Voir Exercices. \square

Nous avons rappelé plus haut (voir Proposition 1.1.1), que le corps \mathbb{Q} était archimédien. Il en est de même du corps des réels :

1.4.8 Proposition. Le corps des réels \mathbb{R} est archimédien, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, pour tout $R \in \mathbb{R}$ tel que $R > 0$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\varepsilon > R$. Plus précisément il existe un unique entier $m \geq 0$ tel que $m\varepsilon \leq R < (m+1)\varepsilon$: cet entier m est appelé partie entière de R/ε et souvent noté $m = \lfloor R/\varepsilon \rfloor$ (et l'entier $(m+1)$ est noté $m+1 = \lceil R/\varepsilon \rceil$).

Pour la preuve on pourra se reporter à l'Exercice 1.1.

Au paragraphe suivant, après avoir introduit, ou rappelé, les notations de Landau, nous énoncerons les propriétés à connaître sur les suites réelles.

1.5 NOTATIONS DE LANDAU

Dans l'étude des suites, ou de manière générale de limites, on est souvent ame-

§ 1.5 Notations de Landau

né à comparer le comportement d'une suite, ou d'une expression dépendant d'un paramètre, avec celui d'une suite connue ou déjà étudiée, ou à celui d'une expression connue ou déjà étudiée dépendant du même paramètre. Dans ces situations il est très commode d'utiliser les notations introduites par Edmund Landau¹.

1.5.1 Définition (notations de Landau).

Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ deux suites de nombres réels (ou complexes).

- 1) On dit que a_n est un grand O de b_n , et on écrit $a_n = O(b_n)$, lorsque

$$\exists M > 0, \quad \exists n_0 \geq 0, \quad \forall n \geq n_0, \quad |a_n| \leq M |b_n|.$$
- 2) On dit que a_n est un petit o de b_n , et on écrit $a_n = o(b_n)$, lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \geq 0, \quad \forall n \geq n_0, \quad |a_n| \leq \varepsilon |b_n|.$$
- 3) On dit que a_n est équivalent à b_n , et on écrit $a_n \sim b_n$, lorsqu'il existe une suite $(c_n)_{n \geq 0}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$ et $a_n = c_n b_n$.

Une autre manière, parfois plus commode, de définir les notions de *grand O* et *petit o* est la suivante : $a_n = O(b_n)$ lorsqu'il existe une suite bornée $(c_n)_{n \geq 0}$ et un entier $n_0 \geq 0$ tels que $a_n = c_n b_n$ pour $n \geq n_0$. En effet, $a_n = c_n b_n$ pour $n \geq n_0$, alors en posant $M := \sup_{n \geq n_0} |c_n|$, on aura $|a_n| \leq M |b_n|$ pour $n \geq n_0$, ce qui signifie que $a_n = O(b_n)$ au sens de la définition 1.5.1. Réciproquement si $|a_n| \leq M |b_n|$ pour $n \geq n_0$, si $b_n \neq 0$ on posera $c_n := a_n / b_n$, et $c_n := 1$ si $b_n = 0$, ou si $n < n_0$. De sorte que $(c_n)_{n \geq 0}$ est une suite bornée par $M' := \max(1, M)$, et $a_n = c_n b_n$.

On notera en particulier que si $\alpha \neq 0$ est un réel, alors $\alpha = O(\alpha)$ et $O(\alpha) = O(1)$. De même le lecteur vérifiera sans peine, en procédant de manière analogue, que $a_n = o(b_n)$ signifie précisément qu'il existe une suite $(c_n)_{n \geq 0}$ tendant vers zéro, telle que $a_n = c_n b_n$ pour $n \geq n_0$ assez grand.

Ainsi, dire que « $a_n = o(1)$ lorsque $n \rightarrow \infty$ » signifie précisément que $a_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. De manière encore plus abrégée, $o(1)$ signifie « quantité qui

¹ Edmund Georg Hermann Landau, mathématicien allemand, né le 14 février 1877 à Berlin (Allemagne), mort le 19 février 1938 à Berlin.

1. Topologie des nombres réels

tend vers zéro », alors que $O(1)$ signifie « quantité bornée ». En particulier le lecteur devrait se convaincre, et s'habituer à lire et à écrire, que

$$o(1) + o(1) = o(1), \quad o(1) - o(1) = o(1), \quad -o(1) = o(1),$$

de même que

$$O(1) + O(1) = O(1), \quad O(1) - O(1) = O(1), \quad -O(1) = O(1).$$

Les propriétés suivantes pour des suites réelles (ou complexes) sont à connaître : la preuve de chacune de ces propriétés ne présente aucune difficulté, mais nécessite uniquement l'écriture, ou plutôt la traduction, de la définition des notations $a_n = O(b_n)$, ou $a_n = o(b_n)$ ou encore $a_n \sim b_n$.

1.5.2 Proposition. (Propriétés élémentaires des notations de Landau).

Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$, $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ des suites réelles ou complexes, et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors on a les propriétés suivantes :

$$(1.5.1) \quad a_n = O(b_n) \text{ et } u_n = O(b_n) \Rightarrow a_n + \lambda u_n = O(b_n)$$

$$(1.5.2) \quad a_n = o(b_n) \text{ et } u_n = o(b_n) \Rightarrow a_n + \lambda u_n = o(b_n)$$

$$(1.5.3) \quad a_n = O(1) \text{ et } u_n = O(1) \Rightarrow a_n + \lambda u_n = O(1)$$

$$(1.5.4) \quad a_n = o(1) \text{ et } u_n = o(1) \Rightarrow a_n + \lambda u_n = o(1)$$

$$(1.5.5) \quad a_n = O(1) \text{ et } u_n = O(1) \Rightarrow a_n u_n = O(1)$$

$$(1.5.6) \quad a_n = o(b_n) \Rightarrow a_n = O(b_n)$$

$$(1.5.7) \quad a_n \sim b_n \Rightarrow a_n = O(b_n)$$

$$(1.5.8) \quad a_n = O(u_n) \text{ et } u_n = O(b_n) \Rightarrow a_n = O(b_n)$$

$$(1.5.9) \quad a_n = o(u_n) \text{ et } u_n = O(b_n) \Rightarrow a_n = o(b_n)$$

$$(1.5.10) \quad a_n = O(b_n) \text{ et } u_n = O(v_n) \Rightarrow a_n u_n = O(b_n v_n)$$

$$(1.5.11) \quad a_n = o(b_n) \text{ et } u_n = O(v_n) \Rightarrow a_n u_n = o(b_n v_n)$$

$$(1.5.12) \quad a_n \sim b_n \text{ et } u_n \sim v_n \Rightarrow a_n u_n \sim b_n v_n$$

Démonstration. Pour (1.5.1), il suffit de noter que si $|a_n| \leq M_1 |b_n|$ pour tout $n \geq n_1$, et $|u_n| \leq M_2 |b_n|$ pour tout $n \geq n_2$, alors en posant $n_0 := \max(n_1, n_2)$ et $M := M_1 + |\lambda| M_2$, pour tout $n \geq n_0$ on a

$$|a_n + \lambda u_n| \leq |a_n| + |\lambda| \cdot |u_n| \leq M_1 |b_n| + |\lambda| M_2 |b_n| = M |b_n|,$$

§ 1.5 Notations de Landau

ce qui signifie que $a_n + \lambda u_n = O(b_n)$. En prenant $b_n := 1$ pour tout $n \geq 0$, on déduit (1.5.3). Noter aussi qu'avec ce choix de b_n , si $a_n = O(1)$ et $u_n = O(1)$ alors, avec les notations ci-dessus, pour $n \geq n_0$ on a $|a_n u_n| \leq M_1 M_2$, ce qui signifie que $a_n u_n = O(1)$, comme annoncé dans (1.5.5).

La preuve de (1.5.2), est analogue : si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe $n_1 \geq 0$ tel que $|a_n| \leq \varepsilon |b_n| / (1 + |\lambda|)$ pour tout $n \geq n_1$, et il existe $n_2 \geq 0$ tel que $|u_n| \leq \varepsilon |b_n| / (1 + |\lambda|)$ pour tout $n \geq n_2$, alors en posant $n_0 := \max(n_1, n_2)$, pour tout $n \geq n_0$ on a

$$|a_n + \lambda u_n| \leq |a_n| + |\lambda| \cdot |u_n| \leq \frac{\varepsilon |b_n|}{1 + |\lambda|} + \frac{|\lambda| \varepsilon |b_n|}{1 + |\lambda|} = \varepsilon |b_n|,$$

ce qui signifie que $a_n + \lambda u_n = o(b_n)$.

La propriété (1.5.6) est évidente, puisque si $a_n = o(b_n)$, en prenant $\varepsilon = 1$ dans la définition de $a_n = o(b_n)$, il existe $n_0 \geq 0$ tel que $|a_n| \leq |b_n|$ pour $n \geq n_0$, ce qui implique $a_n = O(b_n)$ (avec $M := 1$ dans la définition de $a_n = O(b_n)$). De même si $a_n \sim b_n$, il existe $n_0 \geq 0$ et une suite bornée $(c_n)_n$ telle que $a_n = c_n b_n$ pour $n \geq n_0$. En posant alors $M := \sup_{n \geq n_0} |c_n|$, on a $|a_n| \leq M |b_n|$, ce qui signifie que $a_n = O(b_n)$, et ainsi (1.5.7) est prouvée.

La relation de transitivité (1.5.8) découle du fait que si $a_n = O(u_n)$ et $u_n = O(b_n)$, alors il existe $M_1, M_2 > 0$ et des entiers $n_1, n_2 \geq 0$ tels que $|a_n| \leq M_1 |u_n|$ pour $n \geq n_1$ et $|u_n| \leq M_2 |b_n|$ pour $n \geq n_2$. Par conséquent pour $n \geq n_0 := \max(n_1, n_2)$ on aura $|a_n| \leq M_1 M_2 |b_n|$, ce qui signifie que $a_n = O(b_n)$.

La propriété (1.5.9) découle du fait que si pour un certain $M_2 > 0$ et un entier $n_2 \geq 0$ on a $|u_n| \leq M_2 |b_n|$ pour $n \geq n_2$, et si $a_n = o(u_n)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ donné on peut trouver un entier $n_1 \geq 0$ tel que $|a_n| \leq \varepsilon |u_n| / M_2$. D'où on déduit que $|a_n| \leq \varepsilon |b_n|$ pour $n \geq n_0 := \max(n_1, n_2)$.

Pour prouver (1.5.10), il suffit d'écrire que si $|a_n| \leq M_1 |b_n|$ pour $n \geq n_1$ et $|u_n| \leq M_2 |v_n|$ pour $n \geq n_2$, alors $|a_n u_n| \leq M_1 M_2 |b_n v_n|$ pour $n \geq \max(n_1, n_2)$, de sorte que $a_n u_n = O(b_n v_n)$.

De la même manière (1.5.11) provient du fait que si $M_2 > 0$ et $|u_n| \leq M_2 |v_n|$ pour $n \geq n_2$, si $a_n = o(b_n)$, pour $\varepsilon > 0$ fixé on peut trouver $n_1 \geq 0$ tel que $|a_n| \leq \varepsilon |b_n| / M_2$. On aura ainsi $|a_n u_n| \leq \varepsilon |b_n v_n|$ pour $n \geq \max(n_1, n_2)$, c'est-à-dire que $a_n u_n = o(b_n v_n)$.

1. Topologie des nombres réels

Pour terminer, notons que si $(c_n)_n$ et $(c'_n)_n$ sont deux suites qui convergent vers 1, alors on peut écrire $c_n = 1 + o(1)$ et $c'_n = 1 + o(1)$. Il s'en suit que la suite $(c_n c'_n)_n$ converge vers 1, puisque

$$c_n c'_n = (1 + o(1))(1 + o(1)) = 1 + o(1),$$

où on a utilisé le fait que $o(1) \times o(1) = o(1)$ et $o(1) + o(1) = o(1)$. Par conséquent si $a_n = c_n b_n$ et $u_n = c'_n v_n$, on aura $a_n u_n = c''_n b_n v_n$ où $c''_n := c_n c'_n$. Ce qui signifie que $a_n u_n \sim b_n v_n$. \square

1.5.3 Remarque. Par contraste avec les propriétés (1.5.1) et (1.5.2) énumérées ci-dessus, il faut prendre garde à ce que *l'on ne peut pas additionner des suites équivalentes* et en conclure que les sommes sont encore équivalentes. Autrement dit, il existe des suites telles que $a_n \sim b_n$ et $u_n \sim v_n$ pour lesquelles $a_n + u_n$ n'est pas équivalent à $b_n + v_n$. Par exemple considérer les suites définies pour $n \geq 1$ par

$$\begin{aligned} a_n &:= \frac{n-1}{n}, & b_n &:= \frac{n^2+1}{n^2}, \\ u_n &:= -1, & v_n &:= -1. \end{aligned}$$

On voit que $a_n + u_n = -1/n$ alors que $b_n + v_n = 1/n^2$, et clairement $1/n^2$ n'est pas un équivalent de $-1/n$ (et pourtant ici $u_n = v_n$ pour tout n).

On retiendra surtout la règle suivante : si $a_n \sim b_n$ et $u_n \sim v_n$, afin de pouvoir déduire quelque chose au sujet de $a_n + u_n$ en la comparant avec $b_n + v_n$, il faut avoir un peu plus d'information sur le comportement des suites qui interviennent dans ces équivalences, par exemple en obtenant des égalités du genre

$$a_n = b_n(1 + c_n), \quad \text{et} \quad u_n = v_n(1 + z_n),$$

où $(c_n)_n$ et $(z_n)_n$ tendent vers zéro. On voit ainsi que

$$a_n + u_n = b_n + v_n + b_n c_n + v_n z_n,$$

et ensuite il faudra regarder de manière plus précise le comportement de la suite de terme général $b_n c_n + v_n z_n$ en la comparant avec $b_n + v_n$. \square

Pour illustrer la manière dont on peut utiliser les propriétés réunies dans la Proposition 1.5.2, nous allons énoncer le théorème suivant à propos des suites réelles.

§ 1.5 Notations de Landau

1.5.4 Théorème (Propriétés à retenir). Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ des suites de nombres réels.

- 1) Si $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont bornées, alors les suites somme $(x_n + y_n)_n$, et produit $(x_n y_n)_n$ sont bornées.
- 2) Si $(x_n)_n$ est convergente, alors $(x_n)_n$ est bornée.
- 3) Si $(x_n)_n$ tend vers zéro et $(y_n)_n$ est bornée, alors le produit $(x_n y_n)_n$ tend vers zéro.
- 4) Si $(x_n)_n$ tend vers x_* et $(y_n)_n$ tend vers y_* , alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ la suite $(\lambda x_n + y_n)_n$ tend vers $\lambda x_* + y_*$.
- 5) Si $(x_n)_n$ tend vers x_* et $(y_n)_n$ tend vers y_* , alors la suite produit $(x_n y_n)_n$ tend vers $x_* y_*$.
- 6) Si $(x_n)_n$ tend vers x_* et $(y_n)_n$ tend vers y_* avec $y_* \neq 0$, et si pour tout $n \geq 0$ on a $y_n \neq 0$, alors la suite quotient $(x_n / y_n)_n$ tend vers x_* / y_* .

Démonstration. La **propriété 1**) signifie tout simplement la même chose que les propriétés (1.5.3) et (1.5.5).

La **propriété 2**) découle du fait que si $(x_n)_n$ converge vers $x_* \in \mathbb{R}$, alors $x_n = x_* + o(1)$, et d'après (1.5.6) et (1.5.3) on voit que $x_n = O(1)$.

Quant à la **propriété 3**), il s'agit de nouveau de la réécriture de (1.5.11).

Pour prouver la **propriété 4**), écrivons $x_n = x_* + o(1)$ et $y_n = y_* + o(1)$. Puisque $o(1) + \lambda o(1) = o(1)$, il s'en suit que

$$x_n + \lambda y_n = x_* + \lambda y_* + o(1),$$

c'est-à-dire que $x_n + \lambda y_n \rightarrow x_* + \lambda y_*$.

La même vérification peut être faite pour la **propriété 5**), car

$$\begin{aligned} x_n y_n &= (x_* + o(1))(y_* + o(1)) \\ &= x_* y_* + x_* \times o(1) + y_* \times o(1) + o(1) \times o(1) \\ &= x_* y_* + o(1), \end{aligned}$$

ce qui signifie que $x_n y_n \rightarrow x_* y_*$.

Pour ce qui concerne la **propriété 6**) il suffit de vérifier que la suite $1/y_n$ tend vers $1/y_*$, et ensuite utiliser la **propriété 5**).

1. Topologie des nombres réels

Pour ce faire, commençons par rappeler que si $|t| < 1$ on peut écrire

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + \frac{t^2}{1+t}.$$

Par ailleurs, si par exemple $|t| \leq 1/2$, alors $1/2 \leq |1+t| \leq 3/2$ et par conséquent, si une suite $(c_n)_n$ tend vers zéro, pour un certain entier $n_0 \geq 1$ on a $|c_n| \leq 1/2$ pour tout $n \geq n_0$, et donc pour $n \geq n_0$ on peut écrire

$$\frac{1}{1+c_n} = 1 - c_n + \frac{c_n^2}{1+c_n} = 1 - c_n + O(c_n^2).$$

Comme $1 - c_n + O(c_n^2) = 1 + o(1)$ et que $1 + c_n = 1 + o(1)$, cela signifie que nous venons de vérifier la propriété suivante (qui est intéressante en soi...)

$$(1.5.13) \quad \frac{1}{1+o(1)} = 1 + o(1).$$

Revenons à présent à la preuve de la **propriété 6** : en utilisant le fait que $y_* \neq 0$, on voit que

$$y_n = y_* + o(1) = y_* \left(1 + o\left(\frac{1}{y_*}\right) \right) = y_*(1 + o(1)),$$

et par conséquent

$$\frac{1}{y_n} = \frac{1}{y_* + o(1)} = \frac{1}{y_*} \times \frac{1}{1 + o(1)} = \frac{1}{y_*} \times (1 + o(1)) = \frac{1}{y_*} + o(1),$$

ce qui signifie que $1/y_n \rightarrow 1/y_*$. □

1.6 OUVERTS ET FERMÉS DE \mathbb{R}

Nous avons vu dans les paragraphes précédents les propriétés essentielles des suites de nombres réels. Dans ce paragraphe nous allons étudier certains sous-ensembles de \mathbb{R} en introduisant des notions dites « topologiques » qui nous permettront de nous familiariser avec des notions de « topologie » qui seront introduites un peu plus tard ¹ dans des ensembles abstraits.

Rappelons que si X est un ensemble, et si une famille de parties de X , notées $(A_i)_{i \in I}$, avec un ensemble d'indices I , est donnée, on note

¹ Ce qui signifie étude des lieux (topos signifie lieu en grec).

§ 1.6 Ouverts et fermés de \mathbb{R}

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \in X; \exists i \in I, x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \in X; \forall i \in I, x \in A_i\}.$$

Lorsque $I = \emptyset$, on convient que

$$\bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset, \quad \bigcap_{i \in \emptyset} A_i = X.$$

1.6.1 Définition. Un sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}$ est dit **ouvert** si Ω est vide, ou bien si pour tout point $x \in \Omega$ on peut trouver un $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \Omega$.
Un sous-ensemble $F \subset \mathbb{R}$ est dit **fermé** si F^c est ouvert.

Parfois on parle aussi de *partie ouverte* ou *partie fermée*.

On voit tout de suite que \mathbb{R} , ainsi que tout intervalle ouvert (a, b) de \mathbb{R} sont des ensembles ouverts au sens de la définition ci-dessus, lorsque $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$ (étant entendu que cet intervalle est réduit à l'ensemble vide si $a = b$). Il est clair que aussi que \mathbb{R} , ainsi que tout intervalle fermé $[a, b]$, lorsque $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \leq b$, sont des ensembles fermés de \mathbb{R} . En revanche l'intervalle $(0, 1]$ n'est ni ouvert, ni fermé.

Le lecteur s'assurera qu'il n'est pas difficile de vérifier les propriétés énoncées ci-dessous :

1.6.2 Proposition. On désigne par $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathbb{R})$ l'ensemble des parties ouvertes de \mathbb{R} . Alors on a les propriétés suivantes :

- (O-1) L'ensemble vide, \emptyset , et \mathbb{R} appartiennent à \mathcal{O} .
- (O-2) Toute réunion d'ensembles ouverts est un ouvert.
- (O-3) Toute intersection finie d'ensembles ouverts est un ouvert.

Noter qu'une intersection infinie d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert : par exemple si pour $n \geq 1$ on considère les sous-ensembles ouverts

$$\Omega_n := \left(\frac{-1}{n}, 1\right) \quad \text{alors} \quad \bigcap_{n \geq 1} \Omega_n = [0, 1),$$

et l'ensemble $[0, 1)$ n'est ni ouvert ni fermé.

Par passage au complémentaire on voit que les propriétés suivantes sont vraies.

1. Topologie des nombres réels

1.6.3 Proposition. On désigne par $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'ensemble des parties fermées de \mathbb{R} . Alors on a les propriétés suivantes :

- (F-1) L'ensemble vide, \emptyset , et \mathbb{R} appartiennent à \mathcal{F} .
- (F-2) Toute intersection d'ensembles fermés est un fermé.
- (F-3) Toute réunion finie d'ensembles fermés est un fermé.

On notera qu'une réunion infinie de fermés n'est pas nécessairement un fermé : par exemple si pour $n \geq 1$ on considère les sous-ensembles fermés

$$(1.6.1) \quad F_n := \left[\frac{1}{n}, 1 \right] \quad \text{alors} \quad \bigcup_{n \geq 1} F_n = (0, 1],$$

et l'ensemble $(0, 1]$ n'est ni ouvert ni fermé.

1.6.4 Définition. Si $a \in \mathbb{R}$, on dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de a s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset V$. L'ensemble des voisinages de a est noté $\mathcal{V}(a)$.

Par exemple, si $\Omega \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ est non vide et $a \in \Omega$ alors, par la définition 1.6.1 d'un ensemble ouvert, $\Omega \in \mathcal{V}(a)$. En particulier on peut énoncer la caractérisation suivante des ouverts :

1.6.5 Proposition. Un ensemble non vide $\Omega \subset \mathbb{R}$ est ouvert si, et seulement si, Ω est un voisinage de chacun de ses points.

Nous venons de voir que si $\Omega \neq \emptyset$ est ouvert alors il est voisinage de chacun de ses points. Réciproquement, si Ω est voisinage de chacun de ses points, cela signifie que pour chaque $a \in \Omega$ il existe $\varepsilon(a) > 0$ tel que l'intervalle ouvert $(a - \varepsilon(a), a + \varepsilon(a)) \subset \Omega$. D'après la définition 1.6.1, on voit que Ω est un ouvert. \square

On vérifie facilement les propriétés suivantes :

1.6.6 Proposition. Soit $a \in \mathbb{R}$.

- (V-1) Si $V \in \mathcal{V}(a)$ et $A \subset \mathbb{R}$ est tel que $V \subset A$, alors $A \in \mathcal{V}(a)$. En particulier \mathbb{R} est un voisinage de a .
- (V-2) Toute réunion de voisinages de a est un voisinage de a .
- (V-3) Toute intersection finie de voisinages de a est un voisinage de a .

§ 1.6 Ouverts et fermés de \mathbb{R}

Les ensembles F_n définis en (1.6.1) sont des voisinages de 0, mais leur intersection n'en est pas un : cet exemple montre qu'une intersection infinie de voisinages d'un point n'est pas nécessairement un voisinage de ce point.

On notera que si $V \in \mathcal{V}(a)$ alors $a \in V$, et qu'il existe un ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ tel que $a \in \Omega \subset V$: autrement dit on peut toujours se restreindre à un voisinage ouvert de a . En réalité, très souvent la connaissance de tous les voisinages d'un point n'est pas nécessaire, et on peut se restreindre à une certaine sous-famille de voisinages :

1.6.7 Définition. Soit $a \in \mathbb{R}$. Une partie $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}(a)$ est dite une base de voisinages de a , si pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$ on peut trouver $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \subset V$.

Par exemple pour tout point $a \in \mathbb{R}$ donné, l'ensemble

$$\mathcal{B}(a) := \{B_n ; n \geq 1\} \quad \text{où } B_n := (a - 2^{-n}, a + 2^{-n}),$$

est une base de voisinages de a .

1.6.8 Définition. On dit que la topologie de \mathbb{R} est séparée, c'est-à-dire que si $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ et $a_1 \neq a_2$ alors il existe un voisinage V_i de a_i pour $i = 1, 2$ tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

En effet en supposant par exemple que $a_1 < a_2$, en posant $c := (a_1 + a_2)/2$ on peut considérer $V_1 := (-\infty, c)$, et $V_2 := (c, +\infty)$ de sorte que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ et $V_i \in \mathcal{V}(a_i)$ pour $i = 1, 2$.

Pour les suites nous avons vu la notion de valeur d'adhérence qui joue un rôle important. Les notions de *point adhérent* et de *point d'accumulation*¹ sont importantes dans l'étude de la topologie des sous-ensembles :

¹ On dit aussi, parfois, point limite.

1. Topologie des nombres réels

1.6.9 Définition. Soit A un sous-ensemble de \mathbb{R} et $x_0 \in \mathbb{R}$.

- (i) On dit que x_0 est un point adhérent de A si pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}(x_0)$ l'intersection $V \cap A$ est non vide. On désigne par \overline{A} l'ensemble des points adhérents de A , et on l'appelle adhérence de A .
- (ii) On dit que x_0 est un point d'accumulation de A si pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}(x_0)$ l'intersection $V \cap A$ contient un point distinct de x_0 .
- (iii) On dit que x_0 est un point isolé de A s'il existe $V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $A \cap V = \{x_0\}$. Un ensemble dont tous les points sont isolés est appelé un ensemble discret.
- (iv) On dit que x_0 est un point intérieur de A s'il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $V \subset A$. L'ensemble des points intérieurs de A est noté $\overset{\circ}{A}$ et appelé l'intérieur de A .
- (v) On désigne par $\text{Fr}(A)$, ou parfois par ∂A , la frontière de A qui est définie comme étant $\text{Fr}(A) := \partial A := \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

On voit ainsi que, si $A \neq \emptyset$, tout point $x_0 \in A$ est un point adhérent de A . Dire que x_0 est un point d'accumulation de A signifie que x_0 est un point adhérent de l'ensemble $A \setminus \{x_0\}$.

Par exemple si $A := [-1, +1] \cup \mathbb{Z}$, on a $\overline{A} = A$, alors que l'ensemble des points d'accumulation est $[-1, +1]$, et l'ensemble des points isolés est l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $|n| \geq 2$, c'est-à-dire l'ensemble $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, +1\}$. L'ensemble des points intérieurs de A est donné par $\overset{\circ}{A} = (-1, +1)$.

La notion de convergence d'une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ vers $\ell \in \mathbb{R}$ peut s'exprimer ainsi en termes de voisinages de ℓ :

1.6.10 Proposition. Une suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}(\ell)$ il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que $u_n \in V$ lorsque $n \geq n_0$.



1.6.11 Remarque. Il faut prendre garde à la confusion des expressions *valeur d'adhérence d'une suite* et *point adhérent à un ensemble*. En effet si $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite de réels, considérons l'ensemble $A := \{u_n ; n \geq 0\}$. Maintenant dire que $a \in \mathbb{R}$ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$, signifie qu'il existe une sous-suite $(u_{n_k})_{k \geq 0}$ qui converge vers a . Pour l'ensemble A , cela implique

§ 1.6 Ouverts et fermés de \mathbb{R}

aussi que a est un point adhérent de A . Mais tous les points adhérents de A ne sont pas nécessairement des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_n$. Par exemple si $u_n := 2^{-n}$ pour $n \geq 0$, alors 1 est un point adhérent, et isolé, de A , mais la seule valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est $\ell := 0$ (qui, dans ce cas, est aussi un point d'accumulation de A).



Il ne faut pas non plus confondre la notion de *point d'accumulation* de A avec celle de valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$. Par exemple, si $u_n := (-1)^n$, alors $A = \{-1, +1\}$ et on voit que A n'a aucun point d'accumulation, mais la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ possède deux valeurs d'adhérence, qui sont -1 et $+1$. \square

La caractérisation suivante des ensembles fermés est très utile.

1.6.12 Proposition. *Un ensemble $F \subset \mathbb{R}$ est fermé si, et seulement si, F contient tous ses points adhérents, c'est-à-dire $F = \overline{F}$.*

En effet si F est fermé et $x_0 \in F^c$, alors F^c est un ouvert contenant x_0 , et par conséquent F^c est un voisinage de x_0 . Comme $F \cap F^c = \emptyset$ on en conclut que x_0 ne peut pas être un point adhérent de F , et que par conséquent tous les points adhérents de F sont contenus dans F .

Réciproquement, si F contient tous ses points adhérents cela signifie que si $x_0 \in F^c$ alors x_0 n'est pas un point adhérent de F . Par conséquent il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $V \cap F = \emptyset$, c'est-à-dire que $V \subset F^c$, et ainsi F^c est un voisinage de chacun de ses points x_0 . Donc F^c est ouvert, c'est-à-dire que F est un ensemble fermé. \square

On peut faire aussi un lien entre la notion de l'adhérence d'un ensemble et les suites convergentes.

1.6.13 Proposition. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide. Alors un point $\ell \in \overline{A}$ si, et seulement si, il existe une suite $(a_n)_n$ qui converge vers ℓ et $a_n \in A$ pour tout $n \geq 1$.*

1. Topologie des nombres réels

Il est clair que si $\ell \notin \bar{A}$ alors il existe un voisinage V de ℓ tel que $V \cap A = \emptyset$. Par conséquent il n'existe aucune suite de A qui puisse converger vers ℓ . Réciproquement, si $\ell \in \bar{A}$, alors si $V_n := (\ell - 2^{-n}, \ell + 2^{-n})$, qui sont des voisinages de ℓ pour $n \geq 1$, on sait qu'il existe $a_n \in V_n \cap A$. Il est clair que $|\ell - a_n| \leq 2^{-n}$, et ainsi nous avons une suite d'éléments $(a_n)_n$ de A qui converge vers ℓ . \square

On notera qu'une partie fermée F de \mathbb{R} est complète, c'est-à-dire que toute suite de Cauchy d'éléments de F converge vers une limite qui appartient à F .

La propriété suivante, dont la preuve est contenue dans ce que nous venons de dire un peu plus haut, est très importante :

1.6.14 Proposition. *L'adhérence \bar{A} d'un ensemble A est un ensemble fermé, et \bar{A} est le plus petit fermé contenant A .*

En effet, si $\Omega := (\bar{A})^c$ est non vide et $x_0 \in \Omega$, alors il existe un voisinage ouvert $V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $V \cap A = \emptyset$ (puisque x_0 n'est pas un point adhérent de A). Cela implique aussi que $V \cap \bar{A} = \emptyset$, car s'il existait $y \in V \cap \bar{A}$, alors comme V est un ouvert, et que $y \in V$, on aurait $V \in \mathcal{V}(y)$ et donc $V \cap A \neq \emptyset$, puisque $y \in \bar{A}$ est un point adhérent de A : on voit que cela contredit le choix de V .

Puisque $V \cap \bar{A} = \emptyset$, on en conclut que $V \subset \Omega$ et ainsi $\Omega \in \mathcal{V}(x_0)$, c'est-à-dire que Ω est voisinage de chacun de ses points, donc Ω est ouvert et \bar{A} est fermé.

Comme l'intersection de toute famille de fermés est un fermé, le plus petit fermé contenant A est l'intersection de tous les fermés F tels que $A \subset F$. Appelons F_0 ce plus petit fermé contenant A . Puisque \bar{A} est un fermé, on en déduit que $F_0 \subset \bar{A}$. Si $x_0 \notin F_0$, cela signifie que x_0 est un point de F_0^c , qui est un ouvert : par conséquent il existe un voisinage ouvert $V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $V \subset F_0^c$. Ainsi $V \cap F_0 = \emptyset$, et comme $A \subset F_0$ on a aussi $V \cap A = \emptyset$, c'est-à-dire que x_0 n'est pas un point adhérent de A , ou encore $x_0 \in (\bar{A})^c$. On en conclut que $F_0^c \subset (\bar{A})^c$, ce qui signifie que $\bar{A} \subset F_0$, et termine la preuve du fait que $F_0 = \bar{A}$. \square

On a des caractérisations semblables pour les ensembles ouverts.

1.6.15 Proposition. *Un ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}$ est ouvert si, et seulement si, $\Omega = \overset{\circ}{\Omega}$.*

§ 1.6 Ouverts et fermés de \mathbb{R}

Vérifions d'abord que pour tout ensemble A , son intérieur $\overset{\circ}{A}$ est un ensemble ouvert : si $\overset{\circ}{A}$ est vide il est ouvert, par définition. Sinon si $x_0 \in \overset{\circ}{A}$, il existe un voisinage ouvert $V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $V \subset A$, et alors tous les points de V sont encore des points intérieurs de A puisque V est un voisinage de chacun de ses points. Ainsi donc $V \subset \overset{\circ}{A}$ et $\overset{\circ}{A} \in \mathcal{V}(x_0)$, c'est-à-dire en fin de compte que $\overset{\circ}{A}$ est voisinage de chacun de ses points, et donc $\overset{\circ}{A}$ est ouvert.

D'autre part, si Ω est ouvert, il est voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire que tous ses points sont intérieurs, et par conséquent $\Omega = \overset{\circ}{\Omega}$. Si on a $\Omega = \overset{\circ}{\Omega}$, il est clair que Ω est ouvert puisque $\overset{\circ}{\Omega}$ l'est. \square

Pour un ensemble quelconque on a le résultat suivant :

1.6.16 Proposition. *L'intérieur $\overset{\circ}{A}$ d'un ensemble A est un ensemble ouvert, et $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A .*

Nous avons déjà vu plus haut que $\overset{\circ}{A}$ est un ensemble ouvert. Pour voir que $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A , considérons l'ensemble Ω_0 obtenu comme la réunion de tous les ouverts contenus dans A . Ainsi Ω_0 est le plus grand ouvert contenu dans A , puisque toute réunion d'ouverts est un ouvert. En particulier $\overset{\circ}{A} \subset \Omega_0$. Si $x_0 \in \Omega_0$, alors il existe un voisinage ouvert $V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $V \subset \Omega_0 \subset A$. cela montre que x_0 est un point intérieur de A , c'est-à-dire $x_0 \in \overset{\circ}{A}$. On a donc aussi $\Omega_0 \subset \overset{\circ}{A}$, et en fin de compte $\Omega_0 = \overset{\circ}{A}$. \square

Soit A un ensemble non vide. Montrer que la frontière ∂A est un fermé.

Une notion importante en topologie concerne la topologie « locale » induite par la topologie de l'espace ambiant \mathbb{R} . Plus précisément, si $X \subset \mathbb{R}$ est une partie non vide, on peut définir la notion de voisinage d'un point $x_0 \in X$ relativement à X , et celles d'un sous-ensemble ouvert ou fermé relativement à X .

1. Topologie des nombres réels

1.6.17 Définition. Soit $X \subset \mathbb{R}$ une partie non vide.

- 1) On dit qu'une partie $\omega \subset X$ est un ouvert de X s'il existe Ω , un ouvert de \mathbb{R} , tel que $\omega = \Omega \cap X$. L'ensemble des ouverts de X est noté $\mathcal{O}(X)$.
- 2) On dit qu'une partie $A \subset X$ est un fermé de X s'il existe F , un fermé de \mathbb{R} , tel que $A = F \cap X$. L'ensemble des fermés de X est noté $\mathcal{F}(X)$.
- 3) Si $x_0 \in X$, une partie $V \subset X$ est un voisinage de x_0 dans X s'il existe un ouvert $\omega \in \mathcal{O}(X)$ tel que $x_0 \in \omega$ et $\omega \subset V$. L'ensemble des voisinages de x_0 dans X est noté $\mathcal{V}_X(x_0)$.

Par exemple si $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$, considérons $X := [a, b)$. Alors si $\beta > a$, et $\omega := [a, \beta)$, l'ensemble ω est un ouvert de X car $\omega = [a, \beta) \cap (-\infty, \beta)$. De même si $\alpha < b$ et $A := [\alpha, b)$, l'ensemble A est un fermé de X car $A = [a, b) \cap [\alpha, b]$. On notera aussi que si $a < x_0 < b$ un voisinage de x_0 dans X consiste en un sous-ensemble $V \subset X$ tel qu'il existe $\varepsilon > 0$ vérifiant $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset V$. Un voisinage de $a \in X$ consiste en une partie $V \subset X$ telle qu'il existe $\varepsilon > 0$ vérifiant $[a, a + \varepsilon) \subset V$.

Lorsque $Y \subset X$, on peut aussi définir la notion de l'intérieur relatif de Y par rapport à X , et celle de l'adhérence de Y relativement à X . Nous reviendrons sur ces notions un peu plus tard.

Nous avons vu que \mathbb{R} était obtenu comme des classes d'équivalences de suites de Cauchy de rationnels, ce qui permet de dire que tout réel est limite d'une suite de rationnels : on dit que l'ensemble des rationnels \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} . En réalité la notion de densité précisée dans la définition ci-dessous est très importante, et intervient de manière régulière dans beaucoup de branches de l'Analyse.

1.6.18 Définition. Soient $X \subset \mathbb{R}$ et $A \subset X$, on dit que A est dense dans X si $X \subset \overline{A}$ (on dit aussi que A est partout dense dans X).
Si $B \subset X$ et l'ensemble $\overline{B} \cap X$ est d'intérieur vide dans X , alors on dit que B est nulle part dense dans X .

Par exemple si $X := (0, 1]$ et $A := \mathbb{Q} \cap X$, alors A est dense dans X . Noter aussi que dans cet exemple $A^c \cap X$ est aussi dense dans X , ce qui montre que A et $A^c \cap X$ peuvent être tous les deux denses dans X .

§ 1.6 Ouverts et fermés de \mathbb{R}

Comme exemple d'ensemble nulle part dense on peut considérer l'ensemble \mathbb{Z} dans \mathbb{R} : il est clair que \mathbb{Z} est un ensemble fermé et d'intérieur vide. En considérant l'ensemble $B := \{2^{-n} ; n \in \mathbb{N}^*\}$, on vérifie facilement que B est nulle part dense dans $X := (0, 1]$, car l'ensemble $\overline{B} \cap X = B$, qui est d'intérieur vide dans X .

Montrer qu'un ensemble $A \subset X$ est nulle part dense dans X si, et seulement si, pour tout ouvert Ω de X on peut trouver un ouvert $\omega \subset \Omega$ tel que $\omega \cap A = \emptyset$.

Noter que la densité d'un ensemble A dans X , peut être exprimée de manière équivalente par le résultat suivant :

1.6.19 Proposition. Soit $X \subset \mathbb{R}$ et $A \subset X$. Alors A est dense dans X si, et seulement si, pour tout ouvert Ω tel que $X \cap \Omega \neq \emptyset$ on a $\Omega \cap A \neq \emptyset$.



1.6.20 Remarque. Nous avons observé que les ensembles \mathbb{Q} et \mathbb{Q}^c sont tous les deux denses dans \mathbb{R} , ce qui prouve que l'intersection de deux parties denses n'est pas dense en général. Néanmoins on peut vérifier que si Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts denses de \mathbb{R} alors $\Omega := \Omega_1 \cap \Omega_2$ est dense dans \mathbb{R} . Nous verrons plus tard, lors de l'étude des espaces métriques, que toute intersection dénombrable d'ouverts denses de \mathbb{R} est dense dans \mathbb{R} . \square

1.6.21 Remarque. Dire que $A \subset X$ est nulle part dense dans X signifie, par définition, que l'intérieur de \overline{A} est vide (c'est-à-dire que $(\overline{A})^\circ = \emptyset$, l'intérieur étant pris au sens de X). Cela signifie aussi que le complémentaire de \overline{A} (l'adhérence de A dans X) est dense dans X .

Par exemple considérons l'ensemble $X := [0, 1]$ et $A \subset X$ défini par

$$A := \{2^{-n} ; n \geq 1\}.$$

Dans ce cas $\overline{A} \cap X = \overline{A} = A \cup \{0\}$, qui est d'intérieur vide dans X . On voit que

$$(\overline{A})^c \cap X = \{x ; 0 < x < 1 \text{ et } x \neq 2^{-n} \text{ pour tout } n \geq 1\}.$$

On voit sans peine que l'adhérence de $(\overline{A})^c$ dans X est égal à X , c'est-à-dire que $\overline{(\overline{A})^c} \cap X = X$. \square

1. Topologie des nombres réels

1.7 NOTION DE COMPACTITÉ

Lorsque $A \subset \mathbb{R}$, il arrive très souvent que pour étudier certaines propriétés locales ou globales de A l'on soit amené à considérer un recouvrement de A par d'autres sous-ensembles de \mathbb{R} , c'est-à-dire par une famille d'ensembles $B_i \subset \mathbb{R}$ pour $i \in I$ tels que

$$A \subset \bigcup_{i \in I} B_i.$$

Un cas très important est constitué par le cas où les ensembles B_i sont des ouverts de \mathbb{R} .

1.7.1 Définition. Soit A un sous-ensemble de \mathbb{R} . On dit qu'une famille d'ouverts $(\Omega_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de A si

$$A \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i.$$

Si $J \subset I$ et $(\Omega_j)_{j \in J}$ est aussi un recouvrement ouvert de A , alors on dit que $(\Omega_i)_{i \in J}$ est un sous-recouvrement de A , extrait du recouvrement $(\Omega_i)_{i \in I}$. Dans ce cas, lorsque J est un ensemble fini, on dit que $(\Omega_j)_{j \in J}$ est un sous-recouvrement fini de A .

Par exemple si $\Omega_n := (-n, n)$ pour $n \geq 1$, alors $(\Omega_n)_{n \geq 1}$ est un recouvrement ouvert de \mathbb{R} , et $(\Omega_{2k})_{k \geq 1}$ en est un sous-recouvrement. De fait, la famille $(\Omega_n)_{n \geq 1}$ est également un recouvrement ouvert de tout sous-ensemble de \mathbb{R} .

La notion suivante de compacité est très importante, et nous verrons un peu plus loin qu'il s'agit d'une catégorie d'ensembles fermés.

1.7.2 Définition. Un sous-ensemble $K \subset \mathbb{R}$ est dit compact si de tout recouvrement ouvert de K on peut extraire un sous-recouvrement fini.

§ 1.7 Notion de compacité

Par exemple tout ensemble fini de points $A := \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est compact. La droite réelle \mathbb{R} n'est pas compact car son recouvrement par les ouverts $\Omega_n := (-n, n)$, pour $n \geq 1$, ne possède aucun sous-recouvrement fini.

Avant de donner une caractérisation des sous-ensembles compacts de \mathbb{R} , nous allons donner le résultat important suivant (propriété d'intersection finie) :

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle bornée possédant précisément k valeurs d'adhérence $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, pour un entier $k \geq 1$. Montrer que l'ensemble A obtenu par la réunion des deux ensembles $\{a_1, \dots, a_k\}$ et $\{u_n ; n \geq 0\}$ est compact.

1.7.3 Théorème. *Un ensemble $K \subset \mathbb{R}$ est compact si, et seulement si, la propriété suivante est satisfaite :*

$$(1.7.1) \left\{ \begin{array}{l} \text{si } (F_i)_{i \in I} \text{ est une famille de fermés tels que } \bigcap_{i \in I} K \cap F_i = \emptyset \\ \text{alors il existe } J \subset I \text{ fini tel que } \bigcap_{j \in J} K \cap F_j = \emptyset. \end{array} \right.$$

(Cette propriété est appelée « la propriété d'intersection finie »).

En effet, si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de fermés tels que leur intersection $\bigcap_{i \in I} F_i$ a une intersection vide avec K , en notant $\Omega_i := F_i^c$, cela signifie que K est contenu dans la réunion des Ω_i :

$$(1.7.2) \quad \bigcap_{i \in I} K \cap F_i = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad K \subset \left(\bigcap_{i \in I} F_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} \Omega_i.$$

Ainsi on voit que $(\Omega_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de K : si K est compact, il existe un sous-recouvrement fini $(\Omega_j)_{j \in J}$ où J est une partie finie de I ,

$$K \subset \bigcup_{j \in J} \Omega_j \quad \Longleftrightarrow \quad \bigcap_{j \in J} F_j = \bigcap_{j \in J} \Omega_j^c \subset K^c.$$

On en déduit donc

$$\bigcap_{j \in J} K \cap F_j = \emptyset,$$

c'est-à-dire que la propriété (1.7.1) est satisfaite.

Réciproquement, si K vérifie la propriété d'intersection finie (1.7.1), montrons que K est compact. Soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de K et posons $F_i := \Omega_i^c$. Comme par passage au complémentaire

1. Topologie des nombres réels

$$K \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\bigcup_{i \in I} \Omega_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} F_i \subset K^c,$$

on en déduit que

$$\bigcap_{i \in I} K \cap F_i = \emptyset.$$

Puisque K vérifie (1.7.1), il existe une partie finie $J \subset I$ telle que

$$\bigcap_{j \in J} K \cap F_j = \emptyset,$$

ce qui signifie finalement

$$\bigcap_{j \in J} F_j \subset K^c \quad \Longleftrightarrow \quad K \subset \bigcup_{j \in J} F_j^c = \bigcup_{j \in J} \Omega_j,$$

c'est-à-dire que $(\Omega_j)_{j \in J}$ est un sous-recouvrement fini de K , et par conséquent K est compact. \square

Nous avons vu plus haut que l'ensemble \mathbb{R} n'est pas compact, mais naturellement il est fermé, ce qui signifie que les deux notions d'ensemble fermé et d'ensemble compact sont différentes. Cependant nous allons voir maintenant que tout compact est un ensemble fermé :

1.7.4 Proposition. *Soit K un sous-ensemble de compact de \mathbb{R} . Alors K est fermé.*

Pour prouver que K est fermé, on va vérifier que K^c est ouvert, c'est-à-dire qu'il est voisinage de tous ses points. Soit $x_0 \in K^c$ fixé. Il est clair que si $y \in K$ alors $y \neq x_0$, et la topologie de \mathbb{R} étant séparée (voir Définition 1.6.8), il existe un voisinage ouvert $\Omega_y \in \mathcal{V}(y)$ et un voisinage ouvert $V_y \in \mathcal{V}(x_0)$ tels que $\Omega_y \cap V_y = \emptyset$. Ainsi, puisque

$$K \subset \bigcup_{y \in K} \Omega_y$$

la famille $(\Omega_y)_{y \in K}$ est un recouvrement ouvert de K , et puisque ce dernier est compact, on peut trouver un sous-recouvrement fini $(\Omega_{y_j})_{1 \leq j \leq n}$ tel que

$$K \subset \Omega \quad \text{où on a posé } \Omega := \bigcup_{1 \leq j \leq n} \Omega_{y_j}.$$

Considérons maintenant l'ouvert

$$V := \bigcap_{1 \leq j \leq n} V_{y_j},$$

§ 1.7 Notion de compacité

et vérifions que $V \cap \Omega = \emptyset$. En effet s'il y avait un point $x \in V \cap \Omega$, alors pour un certain j_0 (avec $1 \leq j_0 \leq n$) on aurait $x \in \Omega_{y_{j_0}}$ et $x \in V \subset V_{y_{j_0}}$, ce qui est contraire à l'hypothèse $V_{y_{j_0}} \cap \Omega_{y_{j_0}} = \emptyset$. Ainsi on a également $V \cap K = \emptyset$, c'est-à-dire que le voisinage ouvert V est contenu dans K^c , et donc ce dernier est voisinage de chacun de ses points, et de ce fait un ouvert (voir Proposition 1.6.5). \square

Pour ce qui concerne la stabilité de la compacité par union et intersection on a le résultat suivant.

1.7.5 Proposition. Soient K_1 et K_2 deux compacts de \mathbb{R} . Alors $K_1 \cup K_2$ et $K_1 \cap K_2$ sont compacts.

Il est clair que si la famille $(\Omega_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de $K_1 \cup K_2$, alors elle est aussi un recouvrement ouvert de K_1 et aussi de K_2 . Par conséquent il existe des parties finies $J_1 \subset I$ et $J_2 \subset I$ telles que $(\Omega_j)_{j \in J_1}$ soit un recouvrement de K_1 et $(\Omega_j)_{j \in J_2}$ soit un recouvrement de K_2 . Alors en posant $J := J_1 \cup J_2$, il est clair que $(\Omega_j)_{j \in J}$ est un recouvrement de $K_1 \cup K_2$.

Pour voir que $K_1 \cap K_2$ est compact, il suffit d'utiliser la caractérisation donnée par le Théorème 1.7.3. Si on a une famille de fermés $(F_i)_{i \in I}$ telle que

$$\bigcap_{i \in I} K_1 \cap K_2 \cap F_i = \emptyset,$$

alors les ensembles $F'_i := K_2 \cap F_i$ sont fermés (car K_2 est fermé d'après la Proposition 1.7.4) et on a $\bigcap_{i \in I} K_1 \cap F'_i = \emptyset$. Par conséquent il existe $J \subset I$ finie telle que

$$\bigcap_{j \in J} K_1 \cap K_2 \cap F_j = \bigcap_{j \in J} K_1 \cap F'_j = \emptyset,$$

ce qui prouve que $K_1 \cap K_2$ est compact. \square

Voici une classe importante de compacts de \mathbb{R} .

1.7.6 Théorème (Heine–Borel–Lebesgue). Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. Alors l'intervalle $[a, b]$ est compact.

Soit $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de compacts. Montrer que si

$$K := \bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha,$$

alors K est compact.

1. Topologie des nombres réels

Comme le cas $a = b$ ne pose aucune difficulté, supposons que $a < b$ et considérons $(\Omega_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $[a, b]$. Nous devons prouver qu'il existe un sous-recouvrement fini de l'intervalle $[a, b]$.

Soit A l'ensemble des $x \in [a, b]$ tels que l'intervalle fermé $[a, x]$ possède un recouvrement fini extrait de la famille $(\Omega_i)_{i \in I}$. Si nous prouvons que $b \in A$, alors le théorème est établi.

L'ensemble A est non vide car il est clair que $a \in A$, puisqu'il existe $i_0 \in I$ tel que $a \in \Omega_{i_0}$, et ainsi l'intervalle $[a, a]$ est recouvert par un élément extrait du recouvrement.

Comme $A \subset [a, b]$, l'ensemble A est borné et non vide et par conséquent possède une borne supérieure $\beta \in [a, b]$ (voir Théorème 1.4.3), et il existe $j_0 \in I$ tel que $\beta \in \Omega_{j_0}$. Si on avait $\beta < b$, comme d'une part β est la borne supérieure de A et que d'autre part Ω_{j_0} est un ouvert, il existerait $\varepsilon > 0$ tel que

$$\beta + \varepsilon < b, \quad \text{et} \quad (\beta - 2\varepsilon, \beta + 2\varepsilon) \subset \Omega_{j_0},$$

et, par définition de la borne supérieure de A , il existerait $x_0 \in A$ tel que $x_0 \in (\beta - \varepsilon, \beta]$. Ainsi, par définition de l'ensemble A , l'intervalle $[a, x_0]$ a un sous-recouvrement fini, et l'intervalle $[x_0, \beta + \varepsilon] \subset \Omega_{j_0}$: en fin de compte on voit que l'intervalle

$$[a, \beta + \varepsilon] = [a, x_0] \cup [x_0, \beta + \varepsilon]$$

a également un sous-recouvrement fini et donc $\beta + \varepsilon \in A$, ce qui contredit le fait que $\beta = \sup A$. Par conséquent on a nécessairement $\beta = b$.

Maintenant, si $j_0 \in I$ est tel que $b \in \Omega_{j_0}$, en prenant $\varepsilon > 0$ tel que $[b - \varepsilon, b] \subset \Omega_{j_0}$, on sait qu'il existe $x_0 \in A$ tel que $b - \varepsilon \leq x_0 \leq b$. En remarquant comme ci-dessus que $[a, b] = [a, x_0] \cup [x_0, b] \subset [a, x_0] \cup \Omega_{j_0}$, on voit que $b \in A$, c'est-à-dire que $[a, b]$ possède aussi un sous-recouvrement fini. \square

Voici une autre reformulation du Théorème de Bolzano-Weierstrass 1.4.2 en termes d'ensembles compacts : l'avantage de cette formulation est qu'on n'y utilise pas la structure particulière de \mathbb{R} , mais seulement la définition d'un ensemble compact.

§ 1.7 Notion de compacité

1.7.7 Théorème de Bolzano–Weierstrass. *Soit K un ensemble compact et $X \subset K$ une partie de K qui ne possède aucun point d'accumulation dans K . Alors X est un ensemble fini.*
Autrement dit, si $X \subset K$ est un ensemble contenant une infinité de points, alors X possède au moins un point d'accumulation dans K .

En effet si X ne possède aucun point d'accumulation dans K , pour chaque $a \in K$ on peut trouver un voisinage ouvert $\Omega_a \in \mathcal{V}(a)$ tel que l'ensemble $X \cap \Omega_a$ contienne au plus un point. Comme

$$K \subset \bigcup_{a \in K} \Omega_a,$$

et que K est compact, il existe un nombre fini de points $a_1, \dots, a_n \in K$ tels que $K \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} \Omega_{a_i}$. Ainsi X est contenu dans l'ensemble $\bigcup_{1 \leq i \leq n} X \cap \Omega_{a_i}$, qui est un ensemble fini. \square

Une autre propriété importante des ensembles compacts est la suivante :

1.7.8 Proposition. *Soient $K \subset \mathbb{R}$ un ensemble compact et F un ensemble fermé de \mathbb{R} tel que $F \subset K$. Alors F est compact.*

D'après la Proposition 1.7.3, il suffit de vérifier que F satisfait la propriété d'intersection finie (1.7.1) : si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de fermés tels que

$$\bigcap_{i \in I} F \cap F_i = \emptyset,$$

alors on doit trouver une partie finie $J \subset I$ telle que $\bigcap_{j \in J} F \cap F_j = \emptyset$. En posant $A_i := F \cap F_i$, il est clair que chaque A_i est fermé et que $\bigcap_{i \in I} K \cap A_i = \emptyset$. Puisque K est compact, la Proposition 1.7.3 assure qu'il existe une partie finie $J \subset I$ telle que $\bigcap_{j \in J} K \cap A_j = \emptyset$. Comme $K \cap A_j = F \cap F_j$, on a donc établi la propriété désirée. \square

Nous pouvons maintenant caractériser les parties compactes de \mathbb{R} :

1.7.9 Proposition. *Une partie $K \subset \mathbb{R}$ est compacte si, et seulement si, K est fermé et borné.*

Nous venons de voir que tout ensemble compact était fermé. Le fait que tout ensemble compact K de \mathbb{R} est borné est une conséquence du fait que la famille

1. Topologie des nombres réels

d'ouverts $(\Omega_n)_{n \geq 1}$, où $\Omega_n := (-n, n)$ pour $n \geq 1$, est un recouvrement ouvert de K . Comme il existe un recouvrement de K par un nombre fini des Ω_n , et que ces derniers forment une famille croissante, il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que $K \subset \Omega_{n_0} = (-n_0, n_0)$, donc K est fermé et borné.

Réciproquement, si K est fermé et borné, alors il est contenu dans un intervalle fermé et borné du type $K_0 := [-n, n]$ pour un entier $n \geq 1$. Comme K_0 est compact, d'après la Proposition 1.7.6, nous pouvons conclure, en utilisant la Proposition 1.7.8, que K est également un ensemble compact. \square

1.8 NOTION DE CONNEXITÉ

Nous allons maintenant introduire la notion de connexité, qui contient l'idée « d'être en seul morceau » pour les sous-ensembles. Ainsi l'intervalle $[0, 1]$ est « en un seul morceau » alors que l'ensemble $A := [1, 2] \cup (3, 4)$ est « en deux morceaux ». Nous verrons ensuite quels sont les sous-ensembles de \mathbb{R} qui sont « en un seul morceau ».

1.8.1 Définition. Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dite *connexe* si A vérifie la condition suivante : si Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts tels que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ et $A \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$, alors $A \subset \Omega_1$ ou $A \subset \Omega_2$.

Une autre manière d'exprimer la connexité d'un ensemble est la suivante : si Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts *disjoints* alors

$$(1.8.1) \quad A = (A \cap \Omega_1) \cup (A \cap \Omega_2) \implies A \subset \Omega_1 \text{ ou } A \subset \Omega_2.$$

On peut aussi l'exprimer de la manière équivalente suivante : si Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts tels que $A \cap \Omega_i \neq \emptyset$ pour $i = 1, 2$, alors

$$(1.8.2) \quad A = (A \cap \Omega_1) \cup (A \cap \Omega_2) \implies A \cap (\Omega_1 \cap \Omega_2) \neq \emptyset.$$

Intuitivement cela signifie qu'un ensemble connexe A n'est pas réunion disjointe de deux ouverts (relatifs). Un peu plus loin nous allons caractériser les parties connexes de \mathbb{R} , mais il est clair qu'un ensemble $\{a\}$ réduit à un point $a \in \mathbb{R}$ est connexe, alors que \mathbb{Z} ne l'est pas.

On peut voir aussi que \mathbb{Q} n'est pas connexe car par exemple si $\Omega_1 := (-\infty, \sqrt{2})$ et $\Omega_2 := (\sqrt{2}, +\infty)$ on a deux ouverts disjoints $\mathbb{Q} \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$ alors que $\mathbb{Q} \cap \Omega_i \neq \emptyset$ pour $i = 1, 2$.

§ 1.8 Notion de connexité

Une autre manière de définir la connexité d'un ensemble serait de considérer des fermés F_1, F_2 au lieu des ouverts Ω_1, Ω_2 :

1.8.2 Proposition. *Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est connexe si, et seulement si, A vérifie la condition suivante : si F_1, F_2 sont deux fermés tels que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, et $A \subset F_1 \cup F_2$, alors $A \subset F_1$ ou $A \subset F_2$.*

De manière équivalente, une partie A est connexe si, et seulement si, A vérifie la condition suivante : si F_1 et F_2 sont deux fermés tels que $A \cap F_i \neq \emptyset$ pour $i = 1, 2$ alors

$$(1.8.3) \quad A = (A \cap F_1) \cup (A \cap F_2) \implies A \cap (F_1 \cap F_2) \neq \emptyset.$$

En effet supposons que A soit connexe au sens de la Définition 1.8.1. Si F_1, F_2 sont deux fermés tels que $A \cap F_i \neq \emptyset$ et

$$(1.8.4) \quad A = (A \cap F_1) \cup (A \cap F_2),$$

si on avait $A \cap F_1 \cap F_2 = \emptyset$, cela signifierait que A ne rencontre pas l'ensemble $F_1 \cap F_2$, autrement dit que

$$A \subset (F_1 \cap F_2)^c = \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

où on a posé $\Omega_i := F_i^c$ pour $i = 1, 2$. On vérifie facilement que $A \cap \Omega_i \neq \emptyset$ car sinon, par exemple si $A \cap \Omega_1 = \emptyset$, alors $A \subset \Omega_1^c = F_1$, auquel cas $A \cap F_1 = A$ et en utilisant (1.8.4) on voit que $A \cap F_1 \cap F_2 = A \cap F_2 \neq \emptyset$. Par conséquent on a $A \cap \Omega_i \neq \emptyset$ et

$$A = (A \cap \Omega_1) \cup (A \cap \Omega_2),$$

et puisque A est connexe et que les ensembles Ω_1, Ω_2 sont des ouverts, il s'en suit d'après la Définition 1.8.1 que $A \cap \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$. Il existerait donc un élément $x_0 \in A \cap \Omega_1 \cap \Omega_2$, en particulier $x_0 \in F_1^c \cap F_2^c$. Or, par hypothèse, A est la réunion de $A \cap F_1$ et de $A \cap F_2$, et par conséquent x_0 appartient à l'un de ces ensembles, par exemple $x_0 \in A \cap F_1$, et en particulier $x_0 \in F_1$: cela contredit le fait que $x_0 \in F_1^c \cap F_2^c$. Par conséquent l'ensemble $A \cap F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ lorsque A est connexe, c'est-à-dire que la propriété (1.8.3) est satisfaite.

Réciproquement, supposons que l'ensemble A vérifie la propriété (1.8.3) de la proposition et prouvons que A est connexe au sens de la Définition 1.8.1, ce qui est équivalent à prouver que (1.8.2) est satisfaite. Soient donc des ouverts Ω_1, Ω_2 tels que $A = (A \cap \Omega_1) \cup (A \cap \Omega_2)$ et posons $F_i := \Omega_i^c$ pour $i = 1, 2$. Si $A \cap \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, cela signifierait que $A \subset (\Omega_1 \cap \Omega_2)^c = F_1 \cup F_2$, et ainsi on aurait

1. Topologie des nombres réels

$$A = (A \cap F_1) \cup (A \cap F_2).$$

On vérifie facilement, comme ce que nous venons de faire un peu plus haut, que $A \cap F_i \neq \emptyset$, et par conséquent il existerait un élément $x_0 \in A \cap F_1 \cap F_2$, en particulier $x_0 \in F_1 \cap F_2 = \Omega_1^c \cap \Omega_2^c$. Comme A est réunion de $A \cap \Omega_1$ et de $A \cap \Omega_2$, on a par exemple $x_0 \in A \cap \Omega_1$, et en particulier $x_0 \in \Omega_1$: cela contredit le fait que $x_0 \in \Omega_1^c \cap \Omega_2^c$. On en conclut que $A \cap \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$, et que A est connexe. \square

La connexité est stable par passage à l'adhérence : plus précisément on a le résultat suivant.

1.8.3 Proposition. *Soit un sous-ensemble connexe $A \subset \mathbb{R}$. Alors son adhérence \overline{A} est connexe.*

Si \overline{A} a une partition ouverte, c'est-à-dire s'il existe deux ouverts Ω_1, Ω_2 de \mathbb{R} tels que $\overline{A} \cap \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ alors que

$$\overline{A} = (\overline{A} \cap \Omega_1) \cup (\overline{A} \cap \Omega_2),$$

on doit prouver que l'un des ensembles $\overline{A} \cap \Omega_i$, pour $i = 1, 2$, est vide. Or Ω_1 et Ω_2 induisent aussi une partition de A , c'est-à-dire que l'on a

$$A = \overline{A} \cap A = (A \cap \Omega_1) \cup (A \cap \Omega_2).$$

Comme A est connexe, l'un des ensembles $A \cap \Omega_i$, pour $i = 1, 2$, est vide. Pour fixer les idées, supposons que $A \cap \Omega_1 = \emptyset$. Si $\overline{A} \cap \Omega_1$ n'était pas vide, et qu'un point $a \in \overline{A} \cap \Omega_1$, alors Ω_1 serait un voisinage ouvert d'un point $a \in \overline{A}$ et on en déduirait, par définition d'un point adhérent, que $A \cap \Omega_1 \neq \emptyset$, contrairement à notre hypothèse. Par conséquent l'un des ensembles $\overline{A} \cap \Omega_i$ pour $i = 1, 2$ est vide, et l'ensemble \overline{A} est connexe. \square

1.8.4 Remarque. En réalité on peut prouver (et il est conseillé de le faire en exercice...) que si un ensemble A est connexe et si X est un ensemble tel que $A \subset X \subset \overline{A}$, alors X est aussi connexe. \square



1.8.5 Remarque. Par contraste, on verra plus loin que dans un cadre plus général, c'est-à-dire dans un espace topologique autre que la droite réelle que nous étudions ici, l'intérieur d'un ensemble connexe n'est pas nécessairement connexe, même si cela est le cas pour les parties connexes de \mathbb{R} . En effet nous verrons un peu plus bas dans ce paragraphe que les seules parties connexes de

§ 1.8 Notion de connexité

\mathbb{R} sont les intervalles, et naturellement l'intérieur d'un intervalle est soit vide, soit un intervalle non vide, donc connexe. \square

Il est clair qu'en général la réunion de deux ensembles connexes n'est pas connexe : par exemple $A := [0, 1]$ et $B := [2, 3]$ sont connexes, mais leur réunion $[0, 1] \cup [2, 3]$ ne l'est pas. Le résultat suivant donne une condition qui permet de dire si une réunion d'ensembles connexes est connexe (plus tard nous verrons que l'on peut améliorer ce résultat).

1.8.6 Proposition. Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'ensembles connexes et

$$A := \bigcup_{n \geq 1} A_n.$$

On suppose que la suite d'ensembles $(A_n)_{n \geq 1}$ vérifie $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ pour tout $n \geq 1$. Alors A est connexe.

Si Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts disjoints tels que $A \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$, on doit prouver que $A \subset \Omega_1$ ou $A \subset \Omega_2$. Comme $A_1 \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$ et que A_1 est connexe, on a par exemple $A_1 \subset \Omega_1$ et $A_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.

Supposons que pour un entier $n \geq 1$ on ait prouvé que

$$\bigcup_{1 \leq k \leq n} A_k \subset \Omega_1,$$

et montrons que l'on a aussi

$$(1.8.5) \quad \bigcup_{1 \leq k \leq n+1} A_k \subset \Omega_1.$$

Cela découle du fait que A_{n+1} est aussi connexe et il est contenu ou bien dans Ω_1 ou bien dans Ω_2 , mais comme

$$\emptyset \neq A_{n+1} \cap A_n \subset A_{n+1} \cap \Omega_1,$$

on doit avoir nécessairement $A_{n+1} \subset \Omega_1$, et ainsi la propriété (1.8.5) est prouvée. On peut donc conclure que $A \subset \Omega_1$, ce qui prouve que A est connexe. \square

On va maintenant caractériser les parties connexes de \mathbb{R} . On commence par montrer que tout intervalle fermé et borné est connexe.

1.8.7 Lemme. Soit $F := [a, b]$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \leq b$. Alors F est connexe.

Si $a = b$ il est clair que F est connexe. Supposons donc $a < b$ et considérons deux ouverts disjoints Ω_1 et Ω_2 tels que $F \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$. On va montrer que $F \subset \Omega_1$

1. Topologie des nombres réels

ou $F \subset \Omega_2$. On peut supposer, sans perte de généralité, que $a \in \Omega_1$, et par suite on va prouver que $F \cap \Omega_2 = \emptyset$. De manière analogue à ce que nous avons fait lors de la preuve du Théorème 1.7.6, on va considérer l'ensemble

$$A := \{x \in [a, b] ; [a, x] \subset \Omega_1\}.$$

Il est clair que A est non vide (car $a \in A$) et borné, et que si nous prouvons que $b \in A$ la preuve du lemme est terminée.

Remarquons pour commencer que si $x \in A$ et $x < b$ alors, puisque Ω_1 est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$x + \varepsilon \in [a, b] \quad \text{et} \quad (x - 2\varepsilon, x + 2\varepsilon) \subset \Omega_1.$$

On en déduit que $[a, x + \varepsilon] = [a, x] \cup [x, x + \varepsilon] \subset \Omega_1$, et par conséquent on a aussi $x + \varepsilon \in A$. Autrement dit on a la propriété suivante :

$$(1.8.6) \quad x \in A \text{ et } x < b \implies \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } x + \varepsilon \in A.$$

Soit maintenant $\beta := \sup A$, de sorte que $a < \beta \leq b$. Vérifions que $\beta \notin \Omega_2$: en effet, sinon il existerait $\varepsilon > 0$ tel que $(\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon) \subset \Omega_2$. Mais alors, par définition de β comme borne supérieure de A , on pourrait trouver $x \in A \subset \Omega_1$ tel que $\beta - \varepsilon < x \leq \beta$, donc x serait dans $(\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon) \subset \Omega_2$, alors que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Par conséquent on a $\beta \in \Omega_1$ et on peut trouver un $\varepsilon > 0$ et $x \in A$ tels que

$$\beta - \varepsilon < x \leq \beta \quad \text{et} \quad (\beta - 2\varepsilon, \beta + 2\varepsilon) \subset \Omega_1.$$

On en déduit que $[a, \beta] = [a, x] \cup [\beta - \varepsilon, \beta] \subset \Omega_1$, c'est-à-dire que $\beta \in A$. Mais alors, grâce à la propriété (1.8.6), on déduit que $\beta = b$, car sinon on aurait une contradiction avec le fait que $\beta = \sup A$.

Par conséquent $[a, b] \subset \Omega_1$ et $A \cap \Omega_2 = \emptyset$, ce qui termine la preuve de la connexité de $[a, b]$. \square

1.8.8 Proposition. *Un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est connexe si, et seulement si, A est un intervalle.*

En effet si A n'est pas un intervalle, cela signifie qu'on peut trouver $x_1 \in A$ et $x_2 \in A$ et $x_0 \notin A$ tels que $x_1 < x_0 < x_2$. En posant alors $\Omega_1 := (-\infty, x_0)$ et $\Omega_2 := (x_0, +\infty)$ on voit qu'avec ces deux ouverts on a $A \cap \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, alors que

$$A \cap \Omega_1 \neq \emptyset, \quad A \cap \Omega_2 \neq \emptyset, \quad A = (A \cap \Omega_1) \cup (A \cap \Omega_2),$$

ce qui signifie que A n'est pas connexe.

§ 1.9 Fonctions continues d'une variable réelle

Si A est un intervalle, s'il est du type $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \leq b$, nous avons vu au Lemme 1.8.7 que A est connexe. Si A est un intervalle ouvert du type (a, b) ou $(-\infty, +\infty)$, ou bien un intervalle semi-ouvert de l'un des types

$$[a, b), (a, b], (-\infty, b], (-\infty, b), (a, +\infty), [a, +\infty),$$

(où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$) on l'écrit comme une réunion d'ensembles connexes $(A_n)_{n \geq 1}$, où $A_n = [a_n, b_n]$ et $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$, et on en conclut, en utilisant la Proposition 1.8.6, que A est aussi connexe. Par exemple on a

$$[a, b] = \bigcup_{n \geq 1} [a, b - 2^{-n}(b - a)], \quad \text{ou bien} \quad (a, +\infty) = \bigcup_{n \geq 1} [a + 2^{-n}, a + 2^n],$$

et pour chacun des autres cas il n'est pas difficile de trouver une telle décomposition. \square

1.9 FONCTIONS CONTINUES D'UNE VARIABLE RÉELLE

Un fois que nous avons la notion de la valeur absolue sur \mathbb{R} , qui permet de dire, lorsque $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, que si $|x_1 - x_2|$ est *petite*, alors les deux points x_1 et x_2 sont *proches*, ensuite on peut se demander si une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ respecte cette proximité, c'est-à-dire lorsque $|x_1 - x_2|$ est *petite*, alors $|f(x_1) - f(x_2)|$ l'est également.

Nous reviendrons plus loin sur la définition générale d'une fonction continue dans le contexte des espaces métriques (c'est-à-dire des ensembles munis d'une distance), ou dans le cadre des espaces topologiques. Pour le moment nous souhaitons revoir les questions de continuité dans le cadre d'une fonction réelle d'une variable réelle.

1.9.1 Définition. Soit X une partie non vide de \mathbb{R} . Une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite continue en un point $x_* \in X$ si pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver $\delta > 0$ tel que

$$(1.9.1) \quad \forall x \in X, \quad |x - x_*| \leq \delta \implies |f(x) - f(x_*)| \leq \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur X lorsque f est continue en tout point $x_* \in X$.

Lorsque f est continue en $x_* \in X$, on appelle module de continuité de f en x_* le nombre $\delta(x_*, \varepsilon)$ défini par

$$(1.9.2) \quad \delta(x_*, \varepsilon) := \sup \{ \delta > 0 ; (1.9.1) \text{ est satisfaite} \}.$$

1. Topologie des nombres réels

On peut vérifier sans difficulté que cette définition équivaut à dire que si une suite $(x_n)_n$ de X tend vers x_* , alors $(f(x_n))_n$ tend vers $f(x_*)$. En effet si f est continue, et la suite $(x_n)_n$ converge vers x_* , pour tout $\varepsilon > 0$ donné, $\delta > 0$ étant déterminé par la définition ci-dessus, il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que $|x_n - x_*| \leq \delta$. Par conséquent pour $n \geq n_0$ on a aussi $|f(x_n) - f(x_*)| \leq \varepsilon$, ce qui prouve la convergence de $(f(x_n))_n$ vers $f(x_*)$.

Réciproquement, si f n'est pas continue en x_* , cela signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \geq 0$ on peut trouver $x_n \in X$ vérifiant $|x_n - x_*| \leq 2^{-n}$ et $|f(x_n) - f(x_*)| \geq \varepsilon$. Ce qui prouve qu'il existe une suite $(x_n)_n$ convergeant vers x_* alors que $(f(x_n))_n$ ne converge pas vers $f(x_*)$.

Une manière simple et commode de définir la continuité d'une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est d'utiliser les notations de Landau (voir Définition 1.5.1 du paragraphe § 1.5) : si $x_* \in X$ on dira que f est continue en x_* si

$$(1.9.3) \quad \begin{cases} \text{Pour toute suite } (x_n)_{n \geq 0} \text{ telle que } x_n \in X \text{ pour } n \geq 0 \\ x_n \rightarrow x_* \implies f(x_n) = f(x_*) + o(1). \end{cases}$$

Ou, de manière encore plus concise, x_* étant fixé et $o(1)$ désignant des suites qui tendent vers zéro, la notion de continuité peut s'exprimer de la manière suivante :

1.9.2 Proposition. Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est continue au point $x_* \in X$ si, et seulement si,

$$(1.9.4) \quad x_* + o(1) \in X \implies f(x_* + o(1)) = f(x_*) + o(1).$$

On désigne souvent par $C(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de X à valeurs dans \mathbb{R} . Lorsqu'il n'y a pas ambiguïté, on écrit aussi plus brièvement $C(X)$ pour désigner cet ensemble. Noter aussi que la notion de continuité en un point $x_* \in X$ n'est intéressante que lorsqu'il existe des suites « non triviales » $(x_n)_n$ de X qui tendent vers x_* . C'est pourquoi très souvent on ne considère des fonctions continues que sur des ensembles d'intérieurs non vides.

§ 1.9 Fonctions continues d'une variable réelle

On sait que $(\mathcal{F}(X, \mathbb{R}), +, \times)$, l'ensemble des fonctions de $X \rightarrow \mathbb{R}$ muni de l'addition et de la multiplication, est un anneau. De même, on peut rappeler que $(\mathcal{F}(X, \mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions de $X \rightarrow \mathbb{R}$ muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire réel, est un espace vectoriel sur \mathbb{R} . (Plus précisément $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ est une **algèbre** sur \mathbb{R}).

Soit \mathcal{E} l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles qu'il existe un point $x_* \in \mathbb{R}$ tel que f est continue en x_* . Est-ce que \mathcal{E} est un espace vectoriel sur \mathbb{R} ?

1.9.3 Proposition. *L'ensemble $C(X)$ est un sous-anneau et un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$. Cela signifie que si $f, g \in C(X)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a*

$$f + \lambda g \in C(X), \quad fg \in C(X).$$

Démonstration. En effet si $x_* \in X$, en utilisant la caractérisation des fonctions continues par (1.9.4) et (1.5.2), on a

$$\begin{aligned} (f + \lambda g)(x_* + o(1)) &= f(x_* + o(1)) + \lambda g(x_* + o(1)) \\ &= f(x_*) + o(1) + \lambda (g(x_*) + o(1)) \\ &= f(x_*) + \lambda g(x_*) + o(1) \\ &= (f + \lambda g)(x_*) + o(1), \end{aligned}$$

ce qui montre que $f + \lambda g \in C(X)$. De manière analogue on voit que

$$\begin{aligned} (fg)(x_* + o(1)) &= f(x_* + o(1))g(x_* + o(1)) \\ &= (f(x_*) + o(1))(g(x_*) + o(1)) \\ &= f(x_*)g(x_*) + o(1) \\ &= (fg)(x_*) + o(1), \end{aligned}$$

ce qui signifie que $fg \in C(X)$. □

Une autre manière d'exprimer la continuité d'une fonction est l'usage de la notion de voisinage, ou encore de fermés ou d'ouverts. Rappelons (voir Définition 1.6.17) l'ensemble des ouverts de X est noté $\mathcal{O}(X)$ et l'ensemble de ses fermés $\mathcal{F}(X)$.

1. Topologie des nombres réels

1.9.4 Proposition. Soit X une partie de \mathbb{R} et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Si $x_* \in X$ et $y_* := f(x_*)$, alors f est continue en x_* si, et seulement si, pour tout voisinage W de y_* dans \mathbb{R} , l'ensemble $V := f^{-1}(W)$ est un voisinage de x_* .

De manière équivalente $f \in C(X)$ si, et seulement si, pour tout ouvert $\Omega \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ l'ensemble $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de X , c'est-à-dire que $f^{-1}(\Omega) \in \mathcal{O}(X)$.

Cela signifie aussi que $f \in C(X)$ si, et seulement si, pour tout fermé $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'ensemble $f^{-1}(A)$ est un fermé de X , c'est-à-dire $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}(X)$.

En effet dire que W est un voisinage de y_* signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(y_* - \varepsilon, y_* + \varepsilon) \subset W$. D'autre part dire que f est continue au sens de la Définition 1.9.1, signifie qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\text{si } V := (x_* - \delta, x_* + \delta), \quad f(V) \subset (y_* - \varepsilon, y_* + \varepsilon) \subset W.$$

On voit donc que si f est continue et W est un voisinage de y_* , alors $f^{-1}(W)$ contient $V := (x_* - \delta, x_* + \delta)$, ce qui en fait un voisinage de x_* .

Réciproquement si pour tout voisinage W de y_* , l'ensemble $f^{-1}(W)$ est un voisinage de x_* , cela signifie que si on choisit $W := (y_* - \varepsilon, y_* + \varepsilon)$, alors il existe $\delta > 0$ tel que $(x_* - \delta, x_* + \delta) \subset f^{-1}(W)$. Par conséquent, si $|x - x_*| < \delta$ alors on a $|f(x) - f(x_*)| < \varepsilon$, ce qui signifie que f est continue au sens de la Définition 1.9.1.

Les deux autres affirmations de la proposition se vérifient de manière analogue, et leurs preuves sont laissées en exercice. \square

Le théorème suivant réunit les propriétés essentielles qu'il faut connaître de manière parfaite... Les preuves utilisent les propriétés énumérées au Théorème 1.5.4, qu'il faut réviser si besoin est. En résumé, la propriété 2) du théorème ci-dessous reprend ce qui a été annoncée dans la Proposition 1.9.3, c'est-à-dire le fait que $(C(X), +, \times)$ est un anneau, et aussi un espace vectoriel sur \mathbb{R} (la même chose est vraie si on considère l'ensemble des fonctions continues à valeurs complexes, $C(X, \mathbb{C})$). La propriété 1) énonce le fait que les fonctions bornées forment aussi une algèbre.

§ 1.9 Fonctions continues d'une variable réelle

1.9.5 Théorème (propriétés à retenir). Soit $X \subset \mathbb{R}$ et soient $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

- 1) Si f et g sont bornées et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors les fonctions $f + \lambda g$ et fg sont bornées.
- 2) Si f et g sont continues et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors les fonctions $f + \lambda g$ et fg sont continues.
- 3) Si $X_1 \subset \mathbb{R}$ et $u : X_1 \rightarrow X$ est une fonction continue alors la fonction composée $f \circ u : X_1 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $(f \circ u)(x) := f(u(x))$ est continue sur X_1 .
- 4) Si f et g sont continues, et si pour tout $x \in X$ on a $g(x) \neq 0$, alors la fonction $x \mapsto f(x)/g(x)$ est continue.

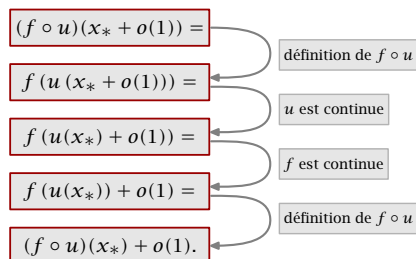
Par exemple vérifions rapidement la **propriété 3**) énoncée ci-dessus, en utilisant la caractérisation (1.9.4) : en désignant par $o(1)$ une suite qui tend vers zéro, on a $u(x_* + o(1)) = u(x_*) + o(1)$, puisque u est continue. Par conséquent, f étant continue, on peut écrire les différentes étapes de ce raisonnement dans le schéma représenté ci-contre.

A la dernière étape on voit que

$$(f \circ u)(x_* + o(1)) = (f \circ u)(x_*) + o(1),$$

ce qui signifie que $f \circ u$ est continue en x_* .

Le lecteur est incité à vérifier les autres assertions du Théorème 1.9.5 en faisant un schéma analogue. \square



Le premier résultat important au sujet des fonctions continues est le fait qu'elles sont bornées et atteignent leur minimum et leur maximum sur un ensemble compact :

1. Topologie des nombres réels

1.9.6 Théorème. Soient X une partie compacte de \mathbb{R} et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée sur X , c'est-à-dire qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in X$ on ait $m \leq f(x) \leq M$. Plus précisément, f atteint ses bornes sur X , c'est-à-dire qu'il existe $x_* \in X$ et $x^* \in X$ tels que

$$f(x_*) = m := \min_{x \in X} f(x), \quad f(x^*) = M := \max_{x \in X} f(x).$$

Il est clair qu'il suffit de prouver que f est majorée et qu'elle atteint sa borne supérieure sur X : en effet en appliquant ce résultat à la fonction $-f$ on en déduira que f atteint aussi son minimum. Soit

$$M := \sup_{x \in X} f(x) \in (-\infty, +\infty].$$

(On notera que nous ne savons pas encore que M est fini : cela découlera de la preuve qui suit). Par définition de la borne supérieure, il existe une suite $(x_n)_n$ de X telle que $f(x_n) \rightarrow M$. Comme X est fermé et borné, la propriété de Bolzano-Weierstrass, Théorème 1.7.7, permet de dire qu'il existe un point $x^* \in X$ et une sous-suite $(x_{n_k})_k$ telle que $x_{n_k} \rightarrow x^*$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Mais alors, f étant continue, on sait que $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x^*)$, et comme par ailleurs $f(x_{n_k}) \rightarrow M$, par définition de la suite $(x_n)_n$, on en conclut que $f(x^*) = M$. Cela prouve en même temps que $M \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que f est majorée, et que le maximum de f est atteint en x^* et vaut précisément M . \square

En fait le Théorème 1.9.6 est une conséquence du fait que l'image continue d'un compact est un compact :

1.9.7 Proposition. Si $X \subset \mathbb{R}$ est compact et $f \in C(X)$ alors $Y := f(X)$ est compact.

En effet si $(\Omega_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de Y , en posant $\omega_i := f^{-1}(\Omega_i)$, sachant que f est continue, ω_i est un ouvert de X et la famille $(\omega_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de X . Par conséquent, X étant compact, il existe un sous-recouvrement fini $(\omega_j)_{j \in J}$ de X et il est clair que $Y = f(X) \subset \cup_{j \in J} \Omega_j$.

Ainsi Y possède un sous-recouvrement fini, et il est compact. \square

Une notion intuitive que l'on utilise souvent de manière inconsciente, et parfois dans des situations qui ne le justifient pas, est celle des valeurs intermédiaires : si une certaine quantité $f(t)$, dépendant du temps t , a été observée en deux

§ 1.9 Fonctions continues d'une variable réelle

instants $t_1 < t_2$, et si les valeurs $\alpha := f(t_1)$ et $\beta := f(t_2)$ ont été observées, on pense que toute valeur y comprise entre α et β a aussi été prise par f , au moins une fois. Même si cette propriété est intuitivement suggérée par le *bon sens*, au sens mathématique elle n'a rien d'évident et elle est liée, en réalité, d'une part à la notion de continuité, et d'autre part à la propriété de connexité de l'ensemble de départ.

1.9.8 Proposition. Soit $X \subset \mathbb{R}$ une partie connexe et $f \in C(X)$. Alors $f(X)$ est connexe.

Soient Ω_1, Ω_2 deux ouverts disjoints de \mathbb{R} tels que $Y \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$. On doit prouver que Y est contenu soit dans Ω_1 soit dans Ω_2 . En posant $\omega_i := f^{-1}(\Omega_i)$ pour $i = 1, 2$, on sait que ω_i est un ouvert de X , puisque f est continue, et que $X \subset \omega_1 \cup \omega_2$. Comme X est connexe et que $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$, on sait que X est contenu dans un seul des ω_i , par exemple $X \subset \omega_1$. Par conséquent $Y = f(X) \subset \Omega_1$, ce qui prouve que Y est connexe. \square

Comme les parties connexes de \mathbb{R} sont des intervalles, le résultat que nous venons de voir signifie que l'image continue d'un intervalle est un intervalle. On en déduit le corollaire suivant :

1.9.9 Corollaire (Théorème des valeurs intermédiaires). Soit $X \subset \mathbb{R}$ une partie connexe et $f \in C(X)$. En posant

$$m := \inf_{x \in X} f(x), \quad M := \sup_{x \in X} f(x),$$

alors, si $m < M$, pour tout $y \in (m, M)$ il existe $x_* \in X$ tel que $f(x_*) = y$.

On notera que les valeurs extrêmes m et M peuvent ne pas être prises par la fonction f .

Le théorème des valeurs intermédiaires peut servir pour caractériser les ensembles connexes. En effet, si X est un ensemble connexe et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $f(X) = \{0, 1\}$, c'est-à-dire l'ensemble discret réduit aux deux éléments 0 et 1, alors f doit être constante car sinon, d'après ce que nous venons de voir, f devrait prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et 1. D'autre part, si X est un ensemble tel que toute fonction continue $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ est constante, alors X est connexe. Car si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver deux ouverts disjoints Ω_1 et Ω_2 de \mathbb{R} tels que

1. Topologie des nombres réels

$$X \subset \Omega_1 \cup \Omega_2 \text{ avec } X \cap \Omega_1 \neq \emptyset \text{ et } X \cap \Omega_2 \neq \emptyset.$$

Alors en définissant la fonction f par

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in X \cap \Omega_1 \\ 0 & \text{si } x \in X \cap \Omega_2, \end{cases}$$

on a une fonction continue $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ qui n'est pas constante. On peut donc retenir cette nouvelle caractérisation des ensembles connexes :

1.9.10 Théorème. *Un ensemble $X \subset \mathbb{R}$ est connexe si, et seulement si, toute fonction continue de X à valeurs dans l'ensemble discret à deux éléments $\{0, 1\}$ est constante.*

1.9.11 Remarque. Lorsque $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, $f^{-1}(A)$, l'image réciproque d'un fermé $A \subset \mathbb{R}$, est un fermé de X .



Mais il ne faut pas confondre une propriété décrite en termes de l'image réciproque d'un ensemble, et une autre propriété décrite en termes de l'image d'un ensemble. Plus précisément, on a vu que l'image d'un compact par une fonction continue est compacte mais, si $K \subset \mathbb{R}$ est un compact, il n'y a aucune raison que $f^{-1}(K)$ soit compact. Par exemple si $f(x) := \sin(x)/(1+x^2)$ alors $f(\mathbb{R}) = [-M, +M]$ où $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x)$. Il est clair que $f^{-1}([-M, +M])$ n'est pas compact, ni d'ailleurs l'image réciproque $f^{-1}([- \alpha, + \alpha])$ où $0 < \alpha \leq M$. De fait cette observation montre aussi que l'image réciproque d'un borné n'est pas nécessairement bornée.

De même, l'image d'un connexe par une fonction continue est connexe, mais l'image réciproque d'un connexe par une fonction continue n'a aucune raison d'être connexe : par exemple si $X := \mathbb{R}^*$ et $f(x) := 1/x^2$, la fonction f est continue sur X , mais l'image réciproque de tout intervalle $[\alpha, \beta]$ avec $0 < \alpha < \beta$ est la réunion de deux intervalles disjoints, donc est non connexe. \square

Dans la Définition 1.9.1 de la continuité on aura noté que le module de continuité $\delta(x_*, \varepsilon)$ dépend de ε mais aussi du point x_* où on étudie la fonction f . Mais il se peut que le module de continuité $\delta(x_*, \varepsilon)$ dépende uniquement de ε : dans ce cas nous aurons affaire à une catégorie de fonctions continues qui méritent d'avoir une dénomination particulière.

§ 1.9 Fonctions continues d'une variable réelle

1.9.12 Définition. Soient $X \subset \mathbb{R}$ et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que est ***f* uniformément continue** sur X si la propriété suivante est satisfaite :

$$(1.9.5) \quad \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, & \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, & \forall (x, y) \in X \times X, \\ & |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Par exemple, si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont donnés, la fonction $f(x) := \alpha x + \beta$ est uniformément continue. En effet, le cas $\alpha = 0$ pouvant être traité de manière évidente, supposons $\alpha \neq 0$. Alors puisque

$$|f(x) - f(y)| = |\alpha x - \alpha y| = |\alpha| \cdot |x - y|,$$

pour avoir $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ il faut et il suffit d'avoir $|x - y| \leq \varepsilon/|\alpha|$, et par conséquent on peut choisir $\delta_0 := \delta_0(\varepsilon) := \varepsilon/|\alpha|$ (d'ailleurs il s'agit de la valeur maximale des δ_0 pour lesquels la propriété (1.9.5) est satisfaite).

Pour une fonction uniformément continue, le module de continuité est remplacé par le nombre $\delta_*(\varepsilon)$ défini par

$$\delta_*(\varepsilon) := \delta_*(f, \varepsilon) := \sup \{ \delta_0 ; \delta_0 := \delta_0(\varepsilon) \text{ satisfait (1.9.5)} \},$$

qui est parfois appelé le module d'uniforme continuité de f .

Dans les exemples qui suivent nous allons voir qu'il existe des fonctions non uniformément continues.

1.9.13 Exemple. Une fonction peut être continue mais non uniformément continue : considérons sur \mathbb{R} la fonction $g(x) := x^2$. En prenant $x < y$, on voit que $|g(x) - g(y)| = (y + x)(y - x)$. Si $\delta > 0$ est donné et $y = x + \delta$, avec $x \geq 0$ quelconque, on voit ainsi que

$$|g(x) - g(x + \delta)| = \delta(2x + \delta) = \delta^2 + 2\delta x > 2\delta x$$

Par conséquent si $x \geq \varepsilon/\delta$ on a $|g(x) - g(x + \delta)| \geq 2\varepsilon$, et on voit ainsi que la propriété (1.9.5) ne peut être vérifiée pour aucun choix de $\delta > 0$, et par conséquent g n'est pas uniformément continue.

Cet exemple montre aussi que le produit de deux fonctions uniformément continues peut ne pas être uniformément continue (en posant $\varphi(x) := x$ on a $g = \varphi \times \varphi$, et évidemment φ est uniformément continue alors que g ne l'est pas). \square

Soient f et g deux fonctions uniformément continues et **bornées**. Montrer que la fonction u définie par $u(x) := f(x)g(x)$ est uniformément continue.

1. Topologie des nombres réels

1.9.14 Exemple. L'exemple ci-dessus montre une fonction continue, mais non uniformément, sur un ensemble non borné, \mathbb{R} en l'occurrence. Mais il y a aussi des fonctions non uniformément continues sur des intervalles bornés : en effet la fonction $u(x) := 1/x$ est continue sur l'intervalle borné $(0, 1)$, mais si on considère $x = 1/n$ et $y = 1/(n+1)$ pour $n \geq 1$ entier, on voit que $|x - y|$ peut être rendue aussi petite que l'on veut, mais $u(y) - u(x) = n(n+1) - n = n^2$ tend vers l'infini lorsque $n \rightarrow \infty$. \square

1.9.15 Exemple. Les deux exemples précédents exhibent des cas où la fonction continue considérée est non bornée. Voici un exemple de fonction continue et bornée, mais non uniformément continue. En posant $v(x) := \cos(\pi x^2)$, on sait que v est une fonction continue. Cependant v n'est pas uniformément continue car si on prend $x_n := 2n$ et $y_n := 2n + (1/8n)$, alors on a $v(x_n) = 1$ et $v(y_n) = -\sin(\pi/64n^2) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$: on voit ainsi que $|x_n - y_n|$ peut être rendue aussi petite que l'on veut, mais $|v(x_n) - v(y_n)| \rightarrow 1$. Par conséquent si dans (1.9.5) on prend $\varepsilon < 1$ on ne peut trouver aucun δ_0 pour que la propriété (1.9.5) soit satisfaite. \square

Avec ces trois exemples on voit qu'une fonction continue peut ne pas être uniformément continue pour des raisons diverses : l'ensemble de définition est non borné, la fonction n'est pas bornée, ou la jonction de ces deux propriétés. On va voir que ces cas constituent *presque* les seuls cas.

Considérons la fonction $\psi(x) := \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0, +\infty)$. Est-ce que ψ est uniformément continue ?

1.9.16 Théorème (E. Heine). Soit X une partie compacte de \mathbb{R} . Alors toute fonction continue $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue sur X .

Démonstration. Si f était continue sans être uniformément continue, il existerait $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier $n \geq 1$ on puisse trouver des points $a_n, b_n \in X$ tels que

$$|a_n - b_n| \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(a_n) - f(b_n)| > \varepsilon.$$

Alors, l'ensemble X étant compact, la propriété de Bolzano-Weierstrass 1.7.7 permet de trouver une sous-suite $(a_{n_k})_{k \geq 1}$ et un point $a_* \in X$ tels que $a_{n_k} \rightarrow a_*$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Comme $\text{dist}(a_{n_k}, b_{n_k}) \leq 1/n_k$, on en conclut que la suite $(b_{n_k})_k$

§ 1.9 Fonctions continues d'une variable réelle

converge aussi vers a_* . Mais alors, la fonction f étant supposée continue, on aurait

$$0 < \varepsilon < |f(a_{n_k}) - f(b_{n_k})| \leq |f(a_{n_k}) - f(a_*)| + |f(a_*) - f(b_{n_k})| \rightarrow 0,$$

lorsque $k \rightarrow \infty$, ce qui est une contradiction. \square

1.9.17 Exemple. Supposons que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie la propriété suivante : il existe $M > 0$ et $\alpha \in (0, 1]$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on ait

$$(1.9.6) \quad |f(x) - f(y)| \leq M |x - y|^\alpha.$$

Alors la fonction f est uniformément continue sur \mathbb{R} . En effet si $\varepsilon > 0$ est donné, pour satisfaire la propriété (1.9.5) il suffit de prendre

$$\delta_0 := \delta_0(\varepsilon) := \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{1/\alpha}.$$

Une fonction vérifiant la propriété (1.9.6) est appelée une fonction höldérienne (en l'honneur d'Otto Hölder¹). \square

1.9.18 Exemple. De manière plus générale, soit $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ une fonction continue en zéro, telle que $h(0) = 0$. Considérons maintenant une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(y)| \leq h(|x - y|).$$

Alors la fonction f est uniformément continue sur \mathbb{R} . En effet, comme h est continue en zéro, si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe $\delta_0 > 0$ tel que pour $0 \leq s \leq \delta_0$ on ait

$$h(s) = |h(s)| = |h(s) - h(0)| \leq \varepsilon.$$

Par conséquent si $s := |x - y| \leq \delta_0$ on a $|f(x) - f(y)| \leq h(|x - y|) = h(s) \leq \varepsilon$, ce qui montre que f satisfait la propriété (1.9.5). Dans ce cas on voit que le module d'uniforme continuité de f est majoré par le module de continuité de la fonction h en zéro. \square

¹ Ludwig Otto Hölder, mathématicien allemand, né le 22 décembre 1859 à Stuttgart (Allemagne), mort le 29 août 1937 à Leipzig (Allemagne)

1. Topologie des nombres réels

1.10 FONCTIONS DÉRIVABLES D'UNE VARIABLE RÉELLE

La notion de dérivée d'une fonction f définie sur une partie $X \subset \mathbb{R}$ peut en fait être définie sur n'importe quel ouvert X de \mathbb{R} , mais comme il s'agit d'une notion locale nous ne considérerons que des fonctions définies sur un intervalle ouvert (a, b) .

1.10.1 Définition. Soient $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_* \in (a, b)$. On dit que f est dérivable en x_* s'il existe une constante $A \in \mathbb{R}$ telle que pour $h \in \mathbb{R}$ et $|h| < \min(x_* - a, b - x_*)$, on ait

$$(1.10.1) \quad f(x_* + h) = f(x_*) + Ah + o(h).$$

Si une telle constante A existe, elle est unique et on note $f'(x_*) := A$. On dira que $f'(x_*)$ est la dérivée de f en x_* .

L'unicité de la constante A dans (1.10.1) provient du fait que si pour une autre constante $B \in \mathbb{R}$ on a

$$f(x_* + h) = f(x_*) + Bh + o(h),$$

on en déduit que $(A - B)h = o(h)$, ou encore $(A - B) = o(1)$ lorsque $h \rightarrow 0$. Comme A et B sont des constantes indépendantes de h , on conclut que $A = B$.

On remarquera naturellement qu'une fonction dérivable en un point x_* y est nécessairement continue (comparer la relation (1.10.1) avec (1.9.4)).

Si f est dérivable en tout point de (a, b) , on dira que f est dérivable sur (a, b) . Si l'application $x_* \mapsto f'(x_*)$ est continue, alors on dit que f est de classe C^1 sur (a, b) , et on notera $C^1((a, b))$ l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur (a, b) .

Si $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ et la propriété (1.10.1) est vraie pour $x_* := a$ et $h > 0$, on dit que f admet une dérivée à droite en a . On notera $f'_d(a) := A$.

Si $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et la propriété (1.10.1) est vraie pour $x_* := b$ et $h < 0$, on dit que f admet une dérivée à gauche en b . On notera $f'_g(b) := A$.

L'ensemble des fonctions dérivables dont la dérivée est continue sur $[a, b]$ sera noté $C^1([a, b])$.

Il n'est pas difficile de construire des exemples de fonctions continues qui ne possèdent pas de dérivée en un nombre fini de points fixés à l'avance. En

§ 1.10 Fonctions dérivables d'une variable réelle

revanche il n'est pas évident de donner un exemple de fonction *nulle part* dérivable sur un intervalle donné. La fonction suivante, appelée fonction de Weierstrass-Hardy¹, et qui est une variante d'un exemple dû à Karl Weierstrass, en fournit un exemple

$$W(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(3^n x)}{2^n}.$$

Cependant la preuve du fait que la fonction W , définie ci-dessus, n'est nulle part dérivable est sensiblement difficile.

Comme nous l'avons fait pour l'espace $C([a, b])$ des fonctions continues sur $[a, b]$, en utilisant (1.10.1) il n'est pas difficile de vérifier que si f, g sont dérivables en un point $x_* \in [a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors les fonctions $f + \lambda g$ et $f g$ sont aussi dérivables en x_* et

$$\begin{aligned} (f + \lambda g)'(x_*) &= f'(x_*) + \lambda g'(x_*), \\ (fg)'(x_*) &= f'(x_*)g(x_*) + f(x_*)g'(x_*). \end{aligned}$$

Par exemple, pour vérifier cette dernière propriété, en posant $A := f'(x_*)$ et $B = g'(x_*)$ on a

$$\begin{aligned} (fg)(x_* + h) &= f(x_* + h)g(x_* + h) \\ &= (f(x_*) + Ah + o(h))(g(x_*) + Bh + o(h)) \\ &= f(x_*)g(x_*) + (Ag(x_*) + f(x_*)B)h + o(h) \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que \mathbb{R} est un corps commutatif, de sorte que

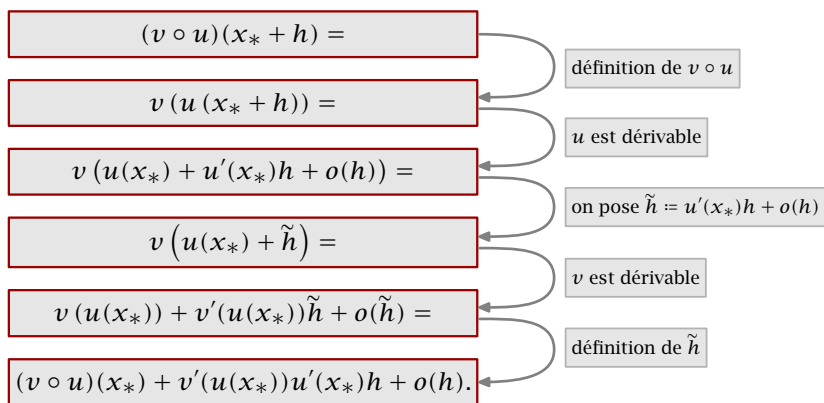
$$Ahg(x_*) + f(x_*)Bh = (Ag(x_*) + f(x_*)B)h,$$

et que tous les autres termes se regroupent dans $o(h)$.

Si $u : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ est dérivable en un point $x_* \in [a, b]$, et $v : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable au point $u(x_*) \in [\alpha, \beta]$, alors la fonction $v \circ u$ définie par $v \circ u(x) := v(u(x))$ définie sur $[a, b]$ est dérivable en x_* . Cela découle de manière simple de la définition (1.10.1), et la démarche à suivre est la suivante :

¹ Godfrey Harold Hardy, mathématicien anglais né le 7 février 1877 à Cranleigh (Surrey, Angleterre), mort le 1^{er} décembre 1947 à Cambridge (Angleterre).

1. Topologie des nombres réels



On voit ainsi que

$$(v \circ u)'(x_*) = v'(u(x_*)) u'(x_*).$$

En particulier considérons la fonction $v : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ définie par

$$v(x) := x^{-1} = \frac{1}{x}.$$

Comme pour $t \in \mathbb{R}$ et $|t| < 1$ on a

$$(1 + t)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = 1 - t + o(t),$$

pour $x \neq 0$ et $|h| < |x|$ on a, en posant $t := x^{-1}h$, et en utilisant le fait que dans le groupe multiplicatif (\mathbb{R}^*, \times) on a $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$,

$$\begin{aligned} v(x + h) &= (x + h)^{-1} = \left(x \left(1 + x^{-1}h\right)\right)^{-1} \\ &= \left(1 + x^{-1}h\right)^{-1} x^{-1} \\ &= \left(1 - x^{-1}h + o(h)\right) x^{-1} \\ &= x^{-1} - x^{-1}hx^{-1} + o(h). \end{aligned}$$

Se rappelant maintenant que $x^{-1}hx^{-1} = x^{-2}h$, car (\mathbb{R}^*, \times) est un groupe commutatif, on voit que

$$v(x + h) = v(x) - x^{-2}h + o(h),$$

ce qui prouve que $v'(x) = -x^{-2}$.

§ 1.10 Fonctions dérivables d'une variable réelle

Maintenant si $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^*$ est une fonction dérivable en un point $x_* \in [a, b]$, la fonction v étant comme ci-dessus, on voit que $v \circ u(x) = u(x)^{-1}$, et par conséquent

$$(u^{-1})'(x_*) = -u(x_*)^{-2}u'(x_*) = \frac{-u'(x_*)}{u(x_*)^2}.$$

Pour un usage ultérieur, nous réunissons ces observations dans l'énoncé suivant :

1.10.2 Proposition. Soient $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables en $x_* \in (a, b)$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les fonctions $f + \lambda g$ et fg sont dérivables en x_* et on a

$$(f + \lambda g)'(x_*) = f'(x_*) + \lambda g'(x_*),$$

$$(fg)'(x_*) = f'(x_*)g(x_*) + f(x_*)g'(x_*).$$

Si $u : (a, b) \rightarrow (\alpha, \beta)$ est dérivable en $x_* \in (a, b)$ et $v : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $u(x_*)$, alors la fonction $v \circ u$ est dérivable en x_* et on a

$$(v \circ u)'(x_*) = v'(u(x_*))u'(x_*).$$

En particulier si $u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^*$ est dérivable en $x_* \in (a, b)$, alors la fonction $1/u$ est dérivable en x_* et on a

$$\left(\frac{1}{u}\right)'(x_*) = \frac{-u'(x_*)}{u(x_*)^2}.$$

Lorsque $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable, on dit que $x_* \in (a, b)$ est un **point critique** de f si $f'(x_*) = 0$. Cette notion est très importante, notamment parce qu'elle permet de caractériser dans une grande mesure les points où f atteint un minimum, ou un maximum, local.

1.10.3 Proposition. Soit $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $x_* \in (a, b)$ est un **point de minimum** (resp. **maximum**) local de f sur (a, b) s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $|h| < \min(\varepsilon, x_* - a, b - x_*)$ on ait

$$f(x_*) \leq f(x_* + h) \quad (\text{resp. } f(x_*) \geq f(x_* + h)).$$

Si f est dérivable en x_* , point de minimum (resp. maximum) local de f , alors on a $f'(x_*) = 0$.

En effet, supposant que par exemple x_* est un point de minimum local de f , puisque $f'(x_*)$ existe on a

1. Topologie des nombres réels

$$f(x_*) \leq f(x_* + h) = f(x_*) + f'(x_*)h + o(h),$$

d'où on déduit que $f'(x_*)h + o(h) \geq 0$. En prenant $h > 0$, on déduit que $f'(x_*) + o(1) \geq 0$, et en faisant tendre $h \rightarrow 0^+$ on en déduit que $f'(x_*) \geq 0$.

En prenant $h < 0$, et sachant que $f'(x_*)h + o(h) \geq 0$, en divisant par h on déduit que $f'(x_*) + o(1) \leq 0$, et en faisant tendre $h \rightarrow 0^-$ on en conclut que $f'(x_*) \leq 0$. En fin de compte il s'en suit que $f'(x_*) = 0$. \square

1.10.4 Remarque. On prendra soin de noter que lorsque $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et qu'on cherche à caractériser un point de minimum local x_* , lorsque ce point appartient à l'intervalle ouvert (a, b) la condition $f'(x_*) = 0$ est seulement une condition nécessaire, et sans information plus précise on ne peut pas conclure qu'un point où la dérivée est nulle correspond à un point de minimum ou de maximum. Par exemple la fonction $f(x) := x^3$ définie sur $[-1, +1]$ vérifie bien $f'(0) = 0$, mais 0 n'est pas un point de minimum, ni de maximum de f sur $(-1, +1)$.



On notera aussi que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ possède une dérivée à droite en a et que ce dernier est un point de minimum (resp. maximum) de f , alors on a $f'_d(a) \geq 0$ (resp. $f'_d(a) \leq 0$). De manière analogue, lorsque f possède une dérivée à gauche en b et que ce dernier est un point de minimum (resp. de maximum) de f , alors on a $f'_g(b) \leq 0$ (resp. $f'_g(b) \geq 0$).

Dans l'un ou l'autre de ces cas, en général on ne peut pas conclure que la dérivée en a , ou en b , est nulle. Par exemple la fonction $f(x) := x^3$ définie sur $[-1, +1]$ atteint son minimum en -1 et on a $f'(-1) = 3 > 0$. De même f atteint son maximum en $+1$, et on a $f'(1) = 3 > 0$. \square

Le résultat suivant, théorème de Rolle¹, est très important dans nombre d'applications que nous verrons par la suite, notamment pour localiser les racines de certains polynômes.

1.10.5 Théorème de Rolle. Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur (a, b) . On suppose que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $x_* \in (a, b)$ tel que $f'(x_*) = 0$.

¹ Michel Rolle, mathématicien français, né à Ambert (Puy de Dôme) le 21 avril 1652 et mort à Paris le 8 novembre 1719.

§ 1.11 Exercices

En effet, grâce au Théorème 1.9.6, on sait que les deux bornes

$$m := \min_{x \in [a,b]} f(x), \quad M := \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

sont atteintes et que $m \leq f(a) = f(b) \leq M$. Si $m = M$, alors la fonction f est constante et sa dérivée est nulle partout.

Si $m < M$, alors on en déduit que $m \neq f(a) = f(b)$ ou $M \neq f(a) = f(b)$, et par conséquent au moins l'une des bornes m ou M est atteinte dans l'intervalle ouvert (a, b) . Par exemple supposons que $m < f(a)$, c'est-à-dire que le minimum m soit atteint en $x_* \in (a, b)$: alors d'après la Proposition 1.10.3 on a $f'(x_*) = 0$. \square

Généraliser le théorème de Rolle de la manière suivante : soit f une fonction n fois dérivable sur $[a, b]$ qui s'annule en $(n+1)$ points $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$. alors la dérivée n -ème de f s'annule au moins une fois sur $[a, b]$. Montrer que si $1 \leq k \leq n$, alors $f^{(k)}$, la dérivée d'ordre k de f , s'annule $(n+1-k)$ fois sur (a, b) .

1.11 EXERCICES

Exercice 1.1. On désigne par \mathcal{C} l'ensemble des suites de Cauchy de \mathbb{Q} et par \mathcal{C}_0 le sous-ensemble des suites de Cauchy rationnelles qui tendent vers zéro. On souhaite montrer que \mathcal{C}_0 est un idéal maximal de \mathcal{C} et que l'anneau quotient $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$ est un corps commutatif, muni d'une valeur absolue notée $|\cdot|$, et complet. Ce corps sera noté désormais \mathbb{R} .

- 1) Soit $u \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0$ une suite de Cauchy rationnelle qui ne tend pas vers zéro. Montrer que

$$(1.11.1) \quad \exists \delta > 0, \quad \exists n_0 \geq 0, \quad \forall n \geq n_0, \quad |u_n| \geq \delta.$$

- 2) En déduire que si $u \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0$, alors la suite $a = (a_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$a_n := \begin{cases} 1 & \text{si } n < n_0 \\ \frac{1}{u_n} & \text{si } n \geq n_0, \end{cases}$$

est une suite de Cauchy.

- 3) En utilisant la première question montrer que si $u, v \in \mathcal{C}$ et $uv \in \mathcal{C}_0$ alors $u \in \mathcal{C}_0$ ou $v \in \mathcal{C}_0$.

1. Topologie des nombres réels

- 4) Soit \mathcal{I} un idéal de \mathcal{C} contenant \mathcal{C}_0 et $\mathcal{I} \neq \mathcal{C}_0$. Si $u \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{C}_0$, l'entier n_0 étant fixé comme dans (1.11.1), on considère les deux suites v et w définie par

$$v_n := \begin{cases} 1 & \text{si } n < n_0 \\ u_n & \text{si } n \geq n_0, \end{cases}$$

et $w_n := 1/v_n$. Vérifier que $v \in \mathcal{I}$ et $w \in \mathcal{C}$. (Trouver $b \in \mathcal{C}_0$ tel que $b_n := 1 - u_n$ et $v = b + u$).

- 5) En déduire que la suite constante 1 (suite dont tous les termes sont égaux à 1) appartient à \mathcal{I} et que par conséquent $\mathcal{I} = \mathcal{C}$, c'est-à-dire que \mathcal{C}_0 est un idéal maximal.
- 6) Vérifier que $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$ est un corps commutatif.

- 7) On dira que $\hat{u} \in \mathcal{C}/\mathcal{C}_0$ est positif (et on écrira $\hat{u} > 0$) s'il existe $u \in \hat{u}$ telle que

$$\exists \delta \in \mathbb{Q}, \quad \delta > 0 \quad \exists n_0 \geq 0, \quad \forall n \geq n_0, \quad u_n \geq \delta.$$

Si $-\hat{u} > 0$ on dira que \hat{u} est négatif (et on écrira $\hat{u} < 0$). On écrira enfin $\hat{u} \leq \hat{v}$ si $\hat{u} = \hat{v}$ ou $\hat{u} - \hat{v} < 0$.

Lorsque $\hat{u} \in \mathcal{C}/\mathcal{C}_0$, on définit $|\hat{u}| \in \mathcal{C}/\mathcal{C}_0$ en posant

$$|\hat{u}| := \begin{cases} \hat{u} & \text{si } \hat{u} > 0 \\ 0 & \text{si } \hat{u} = 0 \\ -\hat{u} & \text{si } \hat{u} < 0. \end{cases}$$

Vérifier que si $\hat{u}, \hat{v} \in \mathcal{C}/\mathcal{C}_0$ alors

$$|\hat{u} + \hat{v}| \leq |\hat{u}| + |\hat{v}|.$$

- 8) On dira que $(\hat{u}_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$ si pour tout $\varepsilon > 0$ rationnel on peut trouver $n_0 \geq 0$ tel que pour $n, m \geq n_0$ on ait $|\hat{u}_n - \hat{u}_m| \leq \varepsilon$ (où ε désigne la classe de la suite constante égale à ε). De manière naturelle, on dira que la suite $(\hat{u}_n)_{n \geq 0}$ converge vers $\hat{\ell} \in \mathcal{C}$ si pour tout $\varepsilon > 0$ rationnel on peut trouver un entier $n_0 \geq 0$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$ on ait $|\hat{u}_n - \hat{\ell}| \leq \varepsilon$.

On va prouver que toute suite de Cauchy admet une limite dans \mathcal{C} .

- (i) La suite $(\hat{u}_n)_{n \geq 0}$ étant de Cauchy, pour chaque entier $n \geq 0$ on considère un élément $a_n := (a_{n,k})_{k \geq 0} \in \mathcal{C}$ tel que $a_n \in \hat{u}_n$, puis

§ 1.11 Exercices

on définit une suite rationnelle ℓ de la manière suivante : pour chaque entier $n \geq 0$ fixé, la suite $(a_{n,k})_{k \geq 0}$ étant de Cauchy, il existe un entier $k_n \geq 0$ tel que

$$\forall k \geq k_n, \quad \forall k' \geq k_n, \quad |a_{n,k} - a_{n,k'}| \leq 2^{-n}.$$

On pose alors pour tout $j \geq 0$ entier, $\ell_j := a_{j,k_j}$. Montrer que ℓ est une suite de Cauchy, c'est-à-dire $\ell \in \mathcal{C}$, et que $\hat{\ell}$ est indépendante du choix des suites $(a_{n,k})_{k \geq 0}$.

- (ii) Prouver que la suite $(\hat{u}_n)_{n \geq 0}$ converge vers $\hat{\ell}$ dans \mathcal{C} au sens de la valeur absolue $|\cdot|$, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ rationnel il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que pour $n \geq n_0$ on ait

$$|\hat{u}_n - \hat{\ell}| \leq \varepsilon.$$

- (iii) En déduire que $(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0, |\cdot|)$ est un corps commutatif complet.

- 9) Vérifier que si $\hat{u} \in \mathcal{C}/\mathcal{C}_0$, pour tout $\varepsilon > 0$ rationnel il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $|\hat{u} - \hat{r}| \leq \varepsilon$. (On dira que les rationnels sont denses dans $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$).
- 10) Montrer que si $\hat{u}, \hat{v} \in \mathcal{C}/\mathcal{C}_0$ avec $\hat{u} > 0$ et $\hat{v} > 0$, alors il existe un entier $k \geq 0$ tel que

$$k\hat{u} \leq \hat{v} < (k+1)\hat{u}.$$

(Cela signifie que $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$ est archimédien).

Exercice 1.2. Soit $\alpha > 1$. On considère la suite

$$u_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha},$$

et on va montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente, en lui associant une suite $v := (v_n)_{n \geq 1}$ telle que les deux suites u et v soient adjacentes à partir d'un certain rang $n_* \geq 1$.

- 1) Pour un nombre réel $\beta > 0$ on considère la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$v_n := u_n + \frac{1}{n^\beta}.$$

Montrer que si $1 + \beta < \alpha$, alors il existe un entier $n_* \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_*$ on ait $v_{n+1} < v_n$.

- 2) En déduire que pour $n \geq n_*$ on a $u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$, et que les deux suites u et v convergent vers la même limite.

1. Topologie des nombres réels

Exercice 1.3. On suppose qu'une suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ possède la propriété suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n - u_{n+1}| < \infty.$$

Montrer que la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy.

Exercice 1.4. Moyenne de Cesàro¹. Soit $x := (x_k)_{k \geq 1}$ une suite réelle. On souhaite étudier la suite $c := (c_n)_{n \geq 1}$ définie comme la moyenne des x_k pour $1 \leq k \leq n$, c'est-à-dire la suite définie en posant

$$c_n := c_n(x) := \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

La suite $c(x)$ est appelée la *moyenne de Cesàro* de la suite x .

- 1) On suppose que la suite $(x_n)_n$ converge vers zéro, et on pose $M := \sup_{k \geq 1} |x_k|$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, soit $n_0 := n_0(\varepsilon) \geq 1$ tel que pour tout $k \geq n_0$ on ait $|x_k| \leq \varepsilon$. On désigne par $n_1 \geq 1$ le premier entier n tel que $n \geq M n_0 / \varepsilon$. Montrer qu'alors pour tout entier $n \geq \max(n_0, n_1)$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} |x_k| \leq \varepsilon, \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^n |x_k| \leq \varepsilon,$$

puis que pour tout $n \geq \max(n_0, n_1)$ on a $|c_n| \leq 2\varepsilon$.

- 2) En déduire que lorsque la suite $x = (x_k)_{k \geq 1}$ tend vers zéro, alors la suite $c = c(x) = (c_n)_n$ tend aussi vers zéro.
- 3) On suppose que la suite $x = (x_k)_{k \geq 1}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $c = c(x) = (c_n)_{n \geq 1}$ tend aussi vers ℓ . (Considérer la suite $y = (y_k)_{k \geq 1}$ où $y_k := x_k - \ell$, puis appliquer le résultat précédent).
- 4) Donner un exemple de suite $x = (x_k)_{k \geq 1}$ qui ne converge pas, mais où la moyenne de Cesàro $c(x)$ converge. (Le procédé de sommation de Cesàro est utilisé parfois pour associer à une suite divergente x , la suite $c(x)$ qui *ressemble à x* , mais qui peut être convergente dans certaines conditions).

¹ Ernesto Cesàro, mathématicien italien, né le 12 mars 1859 à Naples (Italie), mort le 12 septembre 1906 à Torre Annunziata (Italie).

§ 1.11 Exercices

- 5) On considère la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$x_{3k} := 0, \quad x_{3k+1} := 1, \quad x_{3k+2} := 4,$$

où $k \in \mathbb{N}$. Déterminer la suite $c(x)$ ainsi que sa limite, si elle existe.

- 6) Donner un exemple de suite $(x_n)_n$ dont la moyenne de Cesàro ne converge pas.

Exercice 1.5. Soit $x = (x_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle et monotone. On suppose que la moyenne de Cesàro de x converge vers ℓ , c'est-à-dire

$$c_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \rightarrow \ell.$$

Montrer que la suite $(x_n)_n$ converge aussi vers la même limite. (En supposant par exemple que $(x_n)_n$ est croissante, montrer que si $x_n \rightarrow +\infty$ alors $c_n(x) \rightarrow +\infty$ aussi).

Exercice 1.6. Accélération de convergence de Richardson¹-Romberg². Si $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont deux suites réelles convergeant vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$, et si $u_n \neq \ell$ pour tout $n \geq 1$ (ou bien à partir d'un certain rang), on dit que $(v_n)_n$ converge plus vite que $(u_n)_n$, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n - \ell}{u_n - \ell} = 0.$$

On suppose qu'il existe $\theta \in (-1, 1)$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} = \theta.$$

On considère la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$v_n := \frac{u_{n+1} - \theta u_n}{1 - \theta}.$$

(Noter qu'une suite peut être convergente sans que $(u_{n+1} - \ell)/(u_n - \ell)$ admette une limite : considérer par exemple la suite $u_{2k} := 1/2k$ et $u_{2k+1} := 2/(2k+1)$).

¹ Lewis Fry Richardson, mathématicien, physicien, et météorologiste anglais né à Newcastle upon Tyne (Angleterre, Royaume Uni) le 11 octobre 1881, mort à Kilmun (Argyll and Bute, Ecosse, Royaume Uni) le 30 septembre 1953.

² Werner Romberg, mathématicien et physicien allemand, né à Berlin le 16 mai 1909, mort à Heidelberg le 5 février 2003.

1. Topologie des nombres réels

- 1) Montrer que la suite $(v_n)_n$ converge vers ℓ .
- 2) Vérifier que $(v_n)_n$ converge plus vite que $(u_n)_n$.
- 3) On suppose qu'il existe $\omega, \theta \in (-1, +1)$ avec $|\omega| < |\theta|$, et $\alpha \in \mathbb{R}^*$, tels que $u_n = \ell + \alpha \theta^n + O(\omega^n)$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Construire, à partir de $(u_n)_n$, une suite $(v_n)_n$ qui converge vers ℓ plus vite que $(u_n)_n$. On donnera aussi le comportement asymptotique de la suite $(v_n)_n$ en fonction de θ et ω .

Exercice 1.7. (Caractérisation des sous-groupes fermés de \mathbb{R}). On considère un sous-groupe $(G, +)$ du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$, et on souhaite le décrire de manière précise lorsque G est un ensemble fermé de \mathbb{R} . On supposera dans la suite que $G \neq \{0\}$ et $G \neq \mathbb{R}$.

- 1) Vérifier que $G^+ := \{x \in G ; x > 0\}$ est non vide.
- 2) Soit $\tau := \inf G^+$. Montrer que si $\tau = 0$, alors G^+ est dense dans $[0, +\infty)$. (Si $x \in (0, +\infty)$ construire une suite d'éléments $a_n \in G^+$ telle que $a_n \rightarrow x$ lorsque $n \rightarrow \infty$: pour ce faire, considérer un élément $\alpha_n \in G^+$ tel que $0 < \alpha_n < 2^{-n}$, puis utiliser le fait que \mathbb{R} est archimédien et que G est un groupe).
- 3) On suppose que $\tau > 0$. Montrer que si $a \in G^+$ alors il existe un unique entier $k \geq 1$ tel que $a = k\tau$. En déduire $G = \tau\mathbb{Z}$.
- 4) Déduire de ce qui précède qu'un sous-groupe G , distinct de \mathbb{R} et du sous-groupe nul $\{0\}$, est fermé si, et seulement si, $G = \tau\mathbb{Z}$ où $\tau = \inf G^+ > 0$.
- 5) Soit $G := \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$. Vérifier que G est dense dans \mathbb{R} et en déduire que si $x_n := \cos(n)$ pour $n \geq 0$, alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n \geq 1}$ est précisément l'intervalle fermé $[-1, +1]$.
- 6) De manière générale soient τ_1, τ_2 deux réels positifs. Vérifier que $G := \tau_1\mathbb{Z} + \tau_2\mathbb{Z}$ est un sous-groupe additif de \mathbb{R} et déterminer une condition

§ 1.11 Exercices

nécessaire et suffisante sur τ_1 et τ_2 , pour que G soit un sous-groupe fermé de \mathbb{R} .

- 7) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe τ_1, τ_2 , deux nombres réels positifs tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait

$$f(x + \tau_1) = f(x), \quad \text{et} \quad f(x + \tau_2) = f(x).$$

Montrer que si $\tau_1/\tau_2 \notin \mathbb{Q}$, alors f est une fonction constante. Que peut-on dire de f lorsque $\tau_1/\tau_2 \in \mathbb{Q}$?

Exercice 1.8. On se propose d'étudier la suite définie par $u_n := |\sin(n)|^{1/n}$ pour $n \geq 1$.

- 1) On admet (mais cela n'est nullement facile à montrer...) qu'il existe un réel $\theta \geq 2$ et un entier $q_0 \geq 1$ tels que pour tout couple d'entiers p et q , avec $q \geq q_0$, on ait

$$\left| \pi - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{q^\theta}.$$

(On dit que la mesure d'irrationalité de π est inférieure ou égale à θ). Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on peut trouver un entier $q(n)$ et un réel $r(n)$ tels que

$$n = q(n)\pi + r(n), \quad \text{avec} \quad |r(n)| \leq \frac{\pi}{2},$$

et qu'il existe un entier $n_0 \geq 1$ et une constante $c > 0$ tels que pour tout $n \geq n_0$ on ait $|r(n)| \geq c n^{-(\theta-1)}$.

- 2) Montrer que si $|t| \leq \pi/2$ alors $2|t|/\pi \leq |\sin(t)| \leq |t|$.
- 3) Dédurre de ce qui précède que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$.

Exercice 1.9. On considère une suite réelle bornée $(u_n)_n$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_n) = 0.$$

- 1) Soient deux fermés non vides, bornés et disjoints F_1 et F_2 de \mathbb{R} . Montrer que si on pose

$$\text{dist}(F_1, F_2) := \inf \{ |x_1 - x_2| ; (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2 \},$$

1. Topologie des nombres réels

alors $\text{dist}(F_1, F_2) > 0$.

- 2) Soient A l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$, et pour $\varepsilon > 0$ l'ensemble $A_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R} ; \text{dist}(x, A) < \varepsilon\}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $u_n \in A_\varepsilon$.
- 3) En déduire que si A désigne l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$, alors A est un ensemble non vide et connexe. (Considérer F_1 et F_2 , des fermés disjoints et bornés tels que $A \subset F_1 \cup F_2$ et utiliser la question précédente avec $\varepsilon := \text{dist}(F_1, F_2)/2$).

Exercice 1.10. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle bornée telle que

$$u_n^2 + u_n - u_{n+1} \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$. On va prouver que $u_n \rightarrow 0$.

- 1) Soient $f(x) := x^2 + x$ et A l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$. Montrer que si $a \in A$ alors $f(a) \in A$, et qu'il existe $\alpha \in A$ tel que $f(\alpha) = a$, autrement dit que f est une surjection de A dans A et que donc ce dernier est invariant sous l'action de f .
- 2) Soient

$$\lambda := \min A = \varliminf_{n \rightarrow \infty} u_n \quad \text{et} \quad \mu := \max A = \varlimsup_{n \rightarrow \infty} u_n.$$
 Montrer, en utilisant la question précédente, que $\mu = 0$.
- 3) Vérifier que nécessairement $\lambda \geq -1/4$ et qu'il existe $\alpha \in [\lambda, \mu]$ tel que $\lambda = \alpha^2 + \alpha$. En déduire d'abord que $\lambda = 0$, puis que $u_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

► A compléter...

2

TOPOLOGIE SUR UN ENSEMBLE

L'ÉTUDE de la structure « topologique » de la droite réelle, que nous avons menée au chapitre précédent, fait apparaître le fait que des notions telles que la convergence d'une suite vers une limite, ou la compacité et la connexité d'un ensemble, peuvent être exprimées de manière « abstraite » sans faire intervenir explicitement la notion de valeur absolue, ou de distance entre deux points. Nous réunissons ici ces notions topologiques puis, après avoir étudié quelques exemples, nous reviendrons sur la notion de distance définie sur un ensemble.

2.1 ENSEMBLES OUVERTS ET FERMÉS

Nous avons vu à la Proposition 1.6.2 que les ensembles ouverts de \mathbb{R} , définis par la Définition 1.6.1 avaient des propriétés simples qui permettaient de définir les notions de voisinage d'un point, de convergence d'une suite, et de continuité d'une fonction. Pour un ensemble (abstrait) X donné, pourvu que l'on définisse ce que signifie un « ensemble ouvert », et que l'on impose des conditions adéquates à cette définition on obtient une *topologie* sur cet ensemble. On rappelle que l'ensemble des parties d'un ensemble X est noté $\mathcal{P}(X)$.

2.1.1 Définition. On dit qu'un ensemble X est muni d'une topologie $\mathcal{O}(X)$ si $\mathcal{O}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ et vérifie les trois propriétés suivantes :

- (Ω -1) L'ensemble vide, \emptyset , et X appartiennent à $\mathcal{O}(X)$.
- (Ω -2) Toute réunion d'éléments de $\mathcal{O}(X)$ est un élément de $\mathcal{O}(X)$.
- (Ω -3) Toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{O}(X)$ est un élément de $\mathcal{O}(X)$.

Alors on dit que $(X, \mathcal{O}(X))$ est un espace topologique. Si $\Omega \in \mathcal{O}(X)$ on dit que Ω est un ouvert de X (pour la topologie $\mathcal{O}(X)$).

On dit que $F \subset X$ est un fermé de X (pour la topologie $\mathcal{O}(X)$) si $F^c \in \mathcal{O}(X)$.

2. Topologie sur un ensemble

De manière naturelle, comme nous l'avons fait à la Définition 1.6.4, on peut définir le voisinage d'un point $a \in X$:

2.1.2 Définition. Soit X muni d'une topologie $\mathcal{O}(X)$. Si $a \in X$, on dit que $V \subset X$ est un voisinage de a s'il existe $\Omega \in \mathcal{O}(X)$ tel que $a \in \Omega$ et $\Omega \subset V$. L'ensemble des voisinages de a est noté $\mathcal{V}(a)$.

Par exemple, si X est non vide et $a \in X$, alors X est un voisinage de a . De même si $\Omega \in \mathcal{O}(X)$ est non vide et $a \in \Omega$ alors $\Omega \in \mathcal{V}(a)$. En particulier on peut énoncer la caractérisation suivante des ensembles ouverts :

2.1.3 Proposition. Soit X muni d'une topologie $\mathcal{O}(X)$. Un ensemble non vide $\Omega \subset X$ est ouvert si, et seulement si, Ω est un voisinage de chacun de ses points.

L'ensemble des voisinages d'un point possède les propriétés élémentaires (et caractéristiques) que nous allons réunir dans la proposition suivante.

2.1.4 Proposition. Soient X un ensemble non vide muni d'une topologie $\mathcal{O}(X)$, et $a \in X$.

- (V-1) Si $V \in \mathcal{V}(a)$ et $A \subset X$ est tel que $V \subset A$, alors $A \in \mathcal{V}(a)$. En particulier X est un voisinage de a .
- (V-2) Toute réunion de voisinages de a est un voisinage de a .
- (V-3) Toute intersection finie de voisinages de a est un voisinage de a .

La notion de base de voisinages 1.6.7 se généralise de manière naturelle :

2.1.5 Définition. Soient X un ensemble non vide muni d'une topologie $\mathcal{O}(X)$ et $a \in X$. Une partie $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}(a)$ est dite une base de voisinages de a , si pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$ on peut trouver $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \subset V$.

Il est clair que les ensembles fermés de X possèdent les propriétés suivantes.

§ 2.1 Ensembles ouverts et fermés

2.1.6 Proposition. Soit X muni d'une topologie $\mathcal{O}(X)$. On désigne par $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X)$ l'ensemble des parties fermées de X . Alors on a les propriétés suivantes :

- (F-1) L'ensemble vide, \emptyset , et X appartiennent à $\mathcal{F}(X)$.
- (F-2) Toute intersection d'ensembles fermés est un fermé.
- (F-3) Toute réunion finie d'ensembles fermés est un fermé.

Voici comment la continuité d'une application $f : X \rightarrow Y$ est définie.

2.1.7 Définition. Soient $(X, \mathcal{O}(X))$ et $(Y, \mathcal{O}(Y))$ deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application.

Si $x_* \in X$ et $y_* := f(x_*)$, on dit que f est continue en x_* si pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}(y_*)$ pour la topologie $\mathcal{O}(Y)$, l'ensemble $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x_*)$.

On dit que f est continue si elle est continue en tout point $x_* \in X$: cela revient à dire que pour tout ouvert $\Omega \in \mathcal{O}(Y)$ on a $f^{-1}(\Omega) \in \mathcal{O}(X)$.

De manière équivalente cela signifie que l'image réciproque de tout fermé de Y est un fermé de X .

Avant de poursuivre, donnons quelques exemples de topologie sur des ensembles généraux ou familiers.

2.1.8 Exemple. Si X est un ensemble, considérons $\mathcal{O}_g(X) := \{\emptyset, X\}$. Il est clair que $\mathcal{O}_g(X)$ définit une topologie sur X , appelée la topologie grossière de X . Il s'agit de la topologie la plus « petite » sur un ensemble.

Maintenant considérons $\mathcal{O}_d(X) := \mathcal{P}(X)$. Il est clair que $\mathcal{O}_d(X)$ définit une topologie sur X , appelée la topologie discrète de X . Il s'agit de la topologie la plus « grande » sur un ensemble. \square

2.1.9 Exemple. Sur \mathbb{R} considérons l'ensemble $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ défini comme étant l'ensemble des $\Omega \subset \mathbb{R}$ tels que pour tout $a \in \Omega$ on puisse trouver $\varepsilon > 0$ tel que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset \Omega$. Il s'agit de la topologie classique de \mathbb{R} définie à l'aide de la notion de valeur absolue, ou bien grâce à la notion d'ordre total de \mathbb{R} . \square

2.1.10 Exemple. Sur \mathbb{Z} considérons l'ensemble $\mathcal{O}(\mathbb{Z})$ des parties du type $\Omega \cap \mathbb{Z}$ où $\Omega \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$. Il s'agit de la topologie induite par la topologie classique de \mathbb{R} , et on voit facilement qu'il s'agit de la topologie discrète $\mathcal{O}_d(\mathbb{Z})$. \square

2. Topologie sur un ensemble

La notion de séparation (au sens de F. Hausdorff¹) dans une topologie est très importante et, pour ce qui nous concerne, nous ne travaillerons que dans des topologies séparées.

2.1.11 Définition. On dit que la topologie $\mathcal{O}(X)$ est séparée si pour deux éléments $a_1, a_2 \in X$, tels que $a_1 \neq a_2$, il existe un voisinage V_i de a_i , pour $i = 1, 2$ tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.
On dit aussi que l'espace topologique $(X, \mathcal{O}(X))$ est séparé.

Par exemple si X contient au moins deux points, alors la topologie grossière $\mathcal{O}_g(X)$ n'est pas séparée, alors que la topologie discrète $\mathcal{O}_d(X)$ est séparée.

La notion de convergence d'une suite $(x_n)_n$ est définie par :

2.1.12 Définition. Soit $(X, \mathcal{O}(X))$ un espace topologique séparé. On dit qu'une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de X converge vers $x_* \in X$ si, et seulement si, pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}(x_*)$ il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que $u_n \in V$ lorsque $n \geq n_0$.
On dit que x_* est la limite de la suite $(x_n)_n$.

On notera que dans un espace topologique séparé, on parle de *la* limite d'une suite de manière justifiée car une suite ne peut converger que vers une seule limite.

On pourrait définir de la même manière la convergence d'une suite dans un espace topologique non séparé, mais du point de vue des études et des applications que nous allons en faire cela n'a pas grand intérêt.

2.1.13 Exemple. Soient α et ω deux « objets » n'appartenant pas à \mathbb{R} . On considère l'ensemble $X := \mathbb{R} \cup \{\alpha, \omega\}$, et on étend la relation d'ordre de \mathbb{R} à l'ensemble X en décrétant que $\alpha < \omega$, puis que si $x \in \mathbb{R}$ on a $\alpha < x$ et $x < \omega$. On définit de manière naturelle les intervalles de X selon cette relation d'ordre. On considère maintenant l'ensemble $\mathcal{O}(X)$ constitué par les parties $\Omega \subset X$ qui vérifient les conditions suivantes :

¹ Felix Hausdorff, mathématicien allemand né le 8 novembre 1868 à Breslau (Wrocław, en Pologne actuellement), mort le 26 janvier 1942 à Bonn (Allemagne).

§ 2.1 Ensembles ouverts et fermés

- (i) si $\alpha \in \Omega$ alors il existe $R \in \mathbb{R}$ tel que $[\alpha, R) \subset \Omega$;
- (ii) si $\omega \in \Omega$ alors il existe $R \in \mathbb{R}$ tel que $(R, \omega] \subset \Omega$;
- (iii) si $a \in \Omega \cap \mathbb{R}$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset \Omega$.

On vérifie sans peine que $\mathcal{O}(X)$ est une topologie sur X , et que si $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ désigne la topologie classique de \mathbb{R} définie à l'aide de la valeur absolue, alors on a $\mathcal{O}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{O}(X)$. La topologie $\mathcal{O}(X)$ est séparée.

En général on convient de poser aussi $\alpha = -\omega$, puis on note $-\infty := \alpha$ et $+\infty = \omega$. La topologie $\mathcal{O}(X)$ est appelée la topologie de la droite achevée, et l'ensemble X est noté parfois $[-\infty, +\infty]$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$, car un peu plus loin nous verrons que l'adhérence de \mathbb{R} pour la topologie $\mathcal{O}(X)$ est l'ensemble X , ce qui signifie en d'autres termes que \mathbb{R} est dense dans X).

Ainsi, dire qu'une suite de réels $(x_n)_n$ converge vers $+\infty$, signifie pour tout voisinage V de $+\infty$ pour la topologie $\mathcal{O}(X)$, on peut trouver un entier $n_0 \geq 0$ tel que $x_n \in V$ pour tout $n \geq n_0$. \square

2.1.14 Définition. Soient X un ensemble muni d'une topologie $\mathcal{O}(X)$, un sous-ensemble $A \subset X$ et $x_0 \in X$.

- (i) On dit que x_0 est un point adhérent de A si pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}(x_0)$ l'intersection $V \cap A$ est non vide. On désigne par \overline{A} l'ensemble des points adhérents de A , et on l'appelle adhérence de A pour la topologie $\mathcal{O}(X)$.
- (ii) On dit que x_0 est un point d'accumulation de A si pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}(x_0)$ l'intersection $V \cap A$ contient un point distinct de x_0 .
- (iii) On dit que x_0 est un point isolé de A s'il existe $V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $A \cap V = \{x_0\}$. Un ensemble dont tous les points sont isolés est appelé un ensemble discret.
- (iv) On dit que x_0 est un point intérieur de A s'il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $V \subset A$. L'ensemble des points intérieurs de A est noté $\overset{\circ}{A}$ et appelé l'intérieur de A pour la topologie $\mathcal{O}(X)$.
- (v) On désigne par $\text{Fr}(A)$, ou parfois par ∂A , la frontière de A qui est définie comme étant $\text{Fr}(A) := \partial A := \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Comme dans le cas de la topologie de \mathbb{R} , on peut caractériser un ensemble fermé en termes de son adhérence et un ensemble ouvert en termes de son intérieur.

2. Topologie sur un ensemble

2.1.15 Proposition. Soit $(X, \mathcal{O}(X))$ un espace topologique.

- (i) L'adhérence \overline{A} d'un ensemble $A \subset X$ est un ensemble fermé.
- (ii) L'intérieur $\overset{\circ}{A}$ d'un ensemble $A \subset X$ est un ensemble ouvert.
- (iii) Un ensemble $F \subset X$ est fermé si, et seulement si, F contient tous ses points adhérents, c'est-à-dire $F = \overline{F}$.
- (iv) Un ensemble $\Omega \subset X$ est ouvert si, et seulement si, $\overset{\circ}{\Omega} = \Omega$.
- (v) Si $A \subset X$, alors \overline{A} est le plus petit fermé contenant A .
- (vi) Si $A \subset X$, alors $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A .

La preuve est analogue à ce que nous avons vu dans le cas de \mathbb{R} , mais par commodité nous la répétons ici.

Pour (i), si F est fermé et $x_0 \in F^c$, alors F^c est un ouvert contenant x_0 , et par conséquent F^c est un voisinage de x_0 . Comme $F \cap F^c = \emptyset$ on en conclut que x_0 ne peut pas être un point adhérent de F , et que par conséquent tous les points adhérents de F sont contenus dans F .

Réciproquement, si F contient tous ses points adhérents cela signifie que si $x_0 \in F^c$ alors x_0 n'est pas un point adhérent de F . Par conséquent il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $V \cap F = \emptyset$, c'est-à-dire que $V \subset F^c$, et ainsi F^c est un voisinage de chacun de ses points x_0 . Donc F^c est ouvert, c'est-à-dire que F est un ensemble fermé.

Pour (ii), Vérifions d'abord que pour tout ensemble A , son intérieur $\overset{\circ}{A}$ est un ensemble ouvert : si $\overset{\circ}{A}$ est vide il est ouvert, par définition. Sinon si $x_0 \in \overset{\circ}{A}$, il existe un voisinage ouvert $V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $V \subset A$, et alors tous les points de V sont encore des points intérieurs de A puisque V est un voisinage de chacun de ses points. Ainsi donc $V \subset \overset{\circ}{A}$ et $\overset{\circ}{A} \in \mathcal{V}(x_0)$, c'est-à-dire en fin de compte que $\overset{\circ}{A}$ est voisinage de chacun de ses points, et donc $\overset{\circ}{A}$ est ouvert.

D'autre part, si Ω est ouvert, il est voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire que tous ses points sont intérieurs, et par conséquent $\Omega = \overset{\circ}{\Omega}$. Si on a $\Omega = \overset{\circ}{\Omega}$, il est clair que Ω est ouvert puisque $\overset{\circ}{\Omega}$ l'est.

Pour (iii), si $\Omega := (\overline{A})^c$ est non vide et $x_0 \in \Omega$, alors il existe un voisinage ouvert $V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $V \cap A = \emptyset$ (puisque x_0 n'est pas un point adhérent de A). Cela implique aussi que $V \cap \overline{A} = \emptyset$, car s'il existait $y \in V \cap \overline{A}$, alors comme V

§ 2.1 Ensembles ouverts et fermés

est un ouvert, et que $y \in V$, on aurait $V \in \mathcal{V}(y)$ et donc $V \cap A \neq \emptyset$, puisque $y \in \overline{A}$ est un point adhérent de A : on voit que cela contredit le choix de V .

Puisque $V \cap \overline{A} = \emptyset$, on en conclut que $V \subset \Omega$ et ainsi $\Omega \in \mathcal{V}(x_0)$, c'est-à-dire que Ω est voisinage de chacun de ses points, donc Ω est ouvert et \overline{A} est fermé.

Comme l'intersection de toute famille de fermés est un fermé, le plus petit fermé contenant A est l'intersection de tous les fermés F tels que $A \subset F$. Appelons F_0 ce plus petit fermé contenant A . Puisque \overline{A} est un fermé, on en déduit que $F_0 \subset \overline{A}$. Si $x_0 \notin F_0$, cela signifie que x_0 est un point de F_0^c , qui est un ouvert : par conséquent il existe un voisinage ouvert $V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $V \subset F_0^c$. Ainsi $V \cap F_0 = \emptyset$, et comme $A \subset F_0$ on a aussi $V \cap A = \emptyset$, c'est-à-dire que x_0 n'est pas un point adhérent de A , ou encore $x_0 \in (\overline{A})^c$. On en conclut que $F_0^c \subset (\overline{A})^c$, ce qui signifie que $\overline{A} \subset F_0$, et termine la preuve du fait que $F_0 = \overline{A}$.

Pour (iv), nous avons déjà vu plus haut que $\overset{\circ}{A}$ est un ensemble ouvert. Pour voir que $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A , considérons l'ensemble Ω_0 obtenu comme la réunion de tous les ouverts contenus dans A . Ainsi Ω_0 est le plus grand ouvert contenu dans A , puisque toute réunion d'ouverts est un ouvert. En particulier $\overset{\circ}{A} \subset \Omega_0$. Si $x_0 \in \Omega_0$, alors il existe un voisinage ouvert $V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $V \subset \Omega_0 \subset A$. cela montre que x_0 est un point intérieur de A , c'est-à-dire $x_0 \in \overset{\circ}{A}$. On a donc aussi $\Omega_0 \subset \overset{\circ}{A}$, et en fin de compte $\Omega_0 = \overset{\circ}{A}$. \square

Il arrive parfois que sur un même ensemble X on dispose de deux topologies $\mathcal{O}_1(X)$ et $\mathcal{O}_2(X)$. Ainsi par exemple sur un ensemble quelconque on a toujours la topologie grossière $\mathcal{O}_g(X)$ et la topologie discrète $\mathcal{O}_d(X)$, et on voit sur cet exemple que $\mathcal{O}_g(X) \subset \mathcal{O}_d(X)$. On voit aussi que si X contient au moins deux points, il y a plus d'ensembles ouverts dans $\mathcal{O}_d(X)$ que dans $\mathcal{O}_g(X)$, qui ne contient que deux ouverts, \emptyset et X . On dit que la topologie discrète $\mathcal{O}_d(X)$ est plus fine que la topologie $\mathcal{O}_g(X)$. De manière générale, on définit la comparaison des topologies, lorsque cela est possible, de la manière qui suit.

2.1.16 Définition. Soit X un ensemble muni de deux topologies $\mathcal{O}_1(X)$ et $\mathcal{O}_2(X)$. On dit que la topologie $\mathcal{O}_2(X)$ est plus fine que la topologie $\mathcal{O}_1(X)$ si l'on a $\mathcal{O}_1(X) \subset \mathcal{O}_2(X)$. (On dit aussi que la topologie $\mathcal{O}_1(X)$ est moins fine que la topologie $\mathcal{O}_2(X)$).

De manière équivalente la topologie $\mathcal{O}_2(X)$ est plus fine que la topologie $\mathcal{O}_1(X)$ si tout fermé au sens de $\mathcal{O}_1(X)$ est un fermé de $\mathcal{O}_2(X)$.

Cela signifie que tout ensemble ouvert au sens de $\mathcal{O}_1(X)$ est aussi ouvert au sens de $\mathcal{O}_2(X)$.

On peut caractériser de diverses manières le fait qu'une topologie est plus fine qu'une autre.

2.1.17 Proposition. Soit X un ensemble muni de deux topologies $\mathcal{O}_1(X)$ et $\mathcal{O}_2(X)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) La topologie $\mathcal{O}_2(X)$ est plus fine que la topologie $\mathcal{O}_1(X)$.
- (ii) L'application identité $\text{Id} : (X, \mathcal{O}_2(X)) \rightarrow (X, \mathcal{O}_1(X))$ est continue.
- (iii) Tout fermé de $\mathcal{O}_1(X)$ est un fermé de $\mathcal{O}_2(X)$.
- (iv) Si $A \subset X$, l'adhérence de A pour $\mathcal{O}_2(X)$ est contenue dans l'adhérence de A pour $\mathcal{O}_1(X)$.
- (v) Si $a \in X$ et V est un voisinage de a pour la topologie $\mathcal{O}_1(X)$, alors V est un voisinage de a pour la topologie $\mathcal{O}_2(X)$.

Il est clair que (i) \iff (ii), par définition de la continuité, et que (i) \iff (iii), par passage au complémentaire. De même, il n'est pas difficile de voir que (i) \iff (v), puisque par définition tout voisinage de a doit contenir un ouvert contenant a .

Pour vérifier que (iii) \implies (iv), soit F_1 l'adhérence de A au sens de la topologie $\mathcal{O}_1(X)$. Rappelons que F_1 est le plus petit fermé de X au sens de $\mathcal{O}_1(X)$ qui contient A . Puisque $\mathcal{O}_2(X)$ est plus fine que $\mathcal{O}_1(X)$, alors F_1 est un fermé de X au sens de $\mathcal{O}_2(X)$: par conséquent F_1 doit contenir F_2 , qui est le plus petit fermé de X au sens de $\mathcal{O}_2(X)$ contenant A .

Réciproquement, on a (iv) \implies (iii), car si F est un fermé au sens de $\mathcal{O}_1(X)$, alors son adhérence au sens de cette topologie est égale à F , et contient l'adhérence de F au sens de $\mathcal{O}_2(X)$. Par conséquent l'adhérence de F au sens de $\mathcal{O}_2(X)$ est aussi égale à F , et on en déduit que F est un fermé de $\mathcal{O}_2(X)$. \square

§

2.2

► A compléter...

NOTES BIOGRAPHIQUES

Les courtes notes biographiques apparaissant dans ce cours ont été prises sur le projet *The MacTutor History of Mathematics archive*, dont les auteurs sont John J. O'Connor et Edmund F. Robertson, de la *School of Mathematics and Statistics*, de l'université Saint Andrews (Ecosse, Royaume Uni).

L'URL de ce site est

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/>

Les étudiants sont encouragés à se reporter à ce site et à y lire les notices biographiques des mathématiciens dont le nom apparaît dans ce cours (ou dans d'autres cours qu'ils suivent).

BIBLIOGRAPHIE

► A compléter...

§

INDEX

a

accumulation 29

adhérence 30, 75

algèbre 49

c

compacité 36

critère de Cauchy 9

d

dense 34

densité 34

discret 30, 75

e

ensemble des parties 71

ensemble discret 30, 75

i

isolé 30, 75

p

point adhérent 29, 30, 75

point critique 61

► A compléter...

point d'accumulation 29, 30, 75

point intérieur 30, 75

point isolé 30, 75

point limite 29

r

Richardson 67

Romberg 67

recouvrement 36

t

topologie 26

topologie de la droite achevée 75

topologie discrète 73

topologie grossière 73

v

valeur d'adhérence 9

voisinage 28, 72

w

Weierstrass 59

Weierstrass-Hardy 59

