

Ex 1.

- 1) Pour tout $x \in [-1, 1]$ et toute fonction $f \in E$ on a

$$|\mathcal{L}(f)(x)| = |f(x) - f(-x)| \leq |f(x)| + |f(-x)| \leq 2 \|f\|_\infty$$
 donc $\|\mathcal{L}(f)\|_\infty \leq 2 \|f\|_\infty$. On en déduit que \mathcal{L} est continue et que $\|\mathcal{L}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 2$.

En considérant la fonction $f(x) = x$ on a $\|f\|_\infty = 1$ et $\mathcal{L}(f)(x) = 2x$ donc $\|\mathcal{L}(f)\|_\infty = 2$. Ceci assure que $\|\mathcal{L}\|_{\mathcal{L}(E)} \geq 2$ et donc $\|\mathcal{L}\|_{\mathcal{L}(E)} = 2$.

- 2) $\mathcal{P} = \mathcal{L}^{-1}(\{0\})$, \mathcal{L} est continue et $\{0\}$ est fermé.

3)
$$\begin{aligned} \Phi(f+h)(x) &= (f+h)(x)(f+h)(-x) \\ &= \underbrace{f(x)f(-x)}_{\Phi(f)(x)} + \underbrace{f(x)h(-x) + f(-x)h(x)}_{[D\Phi(f) \cdot (h)](x)} + \underbrace{h(x)h(-x)}_{\| \cdot \|_\infty \leq \|h\|_\infty^2 = o(\|h\|_\infty)} \end{aligned}$$

Donc Φ est différentiable et $D\Phi(f) : h \mapsto [x \mapsto f(x)h(-x) + f(-x)h(x)]$.

En effet $D\Phi(f)$ est bien une application linéaire continue sur E puisque pour tout $h \in E$ on a

$$\|D\Phi(f)(h)\|_\infty \leq 2 \|f\|_\infty \|h\|_\infty.$$

On en déduit donc aussi que $\|D\Phi(f)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 2 \|f\|_\infty$.

Si $f \in \mathcal{P}$ alors $D\Phi(f)(h)(x) = f(x)(h(x) + h(-x))$.

En prenant h définie par $h(x) = 1$ on a $\|h\|_\infty = 1$

et $\|D\Phi(f)(h)\|_\infty = 2 \|f\|_\infty$, ce qui prouve que

$$\|D\Phi(f)\|_{\mathcal{L}(E)} \geq 2 \|f\|_\infty \text{ puis } \|D\Phi(f)\|_{\mathcal{L}(E)} = 2 \|f\|_\infty.$$

Si f est impaire on a $D\Phi(f)(h)(x) = f(x)(h(x) - h(-x))$.

En prenant $h = f$ on obtient $D\Phi(f)(f)(x) = 2(f(x))^2$, d'où $\|D\Phi(f)\|_{\mathcal{L}(E)} \geq 2 \|f\|_\infty$ puis $= 2 \|f\|_\infty$.

$$4) D\Phi(p_0)(h)(x) = x(h(x) - h(-x))$$

donc si $h \in \text{Ker } D\Phi(p_0)$ on a pour tout $x \neq 0$, $h(x) = h(-x)$
 Cette relation reste vraie pour $x = 0$ par continuité de h .
 Donc finalement $\text{Ker } D\Phi(p_0) = \mathbb{P}$.

Ex 2.

1) Pour $x \in]0, 1]$ fixé, le développement de Taylor de \sin assure que $\exists \xi_x \in \mathbb{R}$ tq

$$\begin{aligned} \Phi(u+h)(x) &= \sin(u(x) + h(x)) \\ &= \underbrace{\sin(u(x))}_{\Phi(u)(x)} + \underbrace{\cos(u(x))h(x)}_{[D\Phi(u) \cdot h](x)} - \underbrace{\frac{\sin(\xi_x)}{2} (h(x))^2}_{\| \cdot \|_\infty \leq \frac{1}{2} \|h\|_\infty^2 = o(\|h\|_\infty)} \end{aligned}$$

On vérifie facilement que $D\Phi(u): h \mapsto \cos(u) \times h$ est une application linéaire continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans lui-même, ce qui prouve que Φ est différentiable.

Avec le même type de calculs, on vérifie que l'application

$$\begin{cases} E \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ u \longmapsto D\Phi(u) \end{cases} \text{ est différentiable, donc } \Phi \text{ est de classe } \mathcal{C}^2$$

avec $D^2\Phi(u): E \times E \longrightarrow E$
 $(h, k) \longmapsto -\sin(u) \times h \times k$.

2) Comme $|\sin t| \leq |t|$ on a pour $u_0 = 0 \in E$ et $u \in E$

$$\|\Phi(u) - \Phi(u_0)\|_1 = \|\sin(u)\|_1 = \int_0^1 |\sin(u(x))| dx \leq \int_0^1 |u(x)| dx = \|u\|_1$$

et donc Φ est continue en $u_0 = 0$ pour la norme $\|\cdot\|_1$.

3) Pour que h_n soit continue il faut prendre

$$a_n = -n^{\alpha+1} \quad \text{et} \quad b_n = 2n^\alpha$$

$$\text{On obtient alors } \|h_n\|_1 = \frac{3}{2} n^{\alpha-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

4) L'inégalité triangulaire donne

$$\|h_n\|_1 - \|\Phi(h_n)\|_1 \leq \|\Phi(h_n) - h_n\|_1 \leq \|h_n\|_1 + \|\Phi(h_n)\|_1$$

donc il suffit de vérifier que $\frac{\|\Phi(h_n)\|_1}{\|h_n\|_1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\text{Or } \|\Phi(h_n)\|_1 = \int_0^1 |\sin(h_n(x))| dx = \int_0^{\frac{2}{n}} |\sin(h_n(x))| dx \leq \frac{2}{n}$$

$$\text{donc } \frac{\|\Phi(h_n)\|_1}{\|h_n\|_1} \leq \frac{4}{3} n^{-\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ex 3.

1) $n=0$. (1) assure que $AB - BA = I$
et d'autre part $(0+1)B^0 = I$

$n \Rightarrow n+1$. On part de $AB^{n+1} - B^{n+1}A = (n+1)B^n$

qui donne par multiplication par B à gauche

$$BAB^{n+1} - B^{n+2}A = (n+1)B^{n+1}$$

en utilisant (1) on a $BAB^{n+1} = (AB - I)B^{n+1} = AB^{n+2} - B^{n+1}$

et donc $AB^{n+2} - B^{n+2}A = (n+2)B^{n+1}$.

$$2) (n+1)\|B^n\| = \|AB^{n+1} - B^{n+1}A\| \leq \|AB^{n+1}\| + \|B^{n+1}A\| \leq 2\|A\|\|B\|\|B^n\|$$

Pour $n+1 > 2\|A\|\|B\|$ on a donc nécessairement $\|B^n\| = 0$
et donc $B^n = 0$.

3) (2) assure que $AB^n - B^nA = nB^{n-1}$

donc si $B^n = 0$, $B^{n-1} = \frac{1}{n}(A \times 0 - 0 \times A) = 0$.

On sait par la question 2) qu'il existe n tel que $B^n = 0$
et donc par récurrence descendante on en déduit que

$\forall k \leq n$, $B^k = 0$, et en particulier $B = 0$.