

Interrogation écrite du 7/11/2017 - Correction

Ex 1.

- 1) Appliquer le Théorème des valeurs intermédiaires à $x \mapsto f(x) - x$.
- 2) (i) A est l'image réciproque de $\{0\}$ par l'application continue $x \mapsto f(x) - x$, donc A est fermé (car $\{0\}$ est fermé).
Si $a \in A$, alors $f(g(a)) = g(f(a)) = g(a)$ donc $g(a) \in A$.
- (ii) $A \subset [0, 1]$ donc A est un ensemble fermé et borné, donc compact.
on en déduit donc l'existence de $\beta \in A$ tq $\beta = \max A$.
D'après la question précédente, comme $\beta \in A$ on a $g(\beta) \in A$
et donc $g(\beta) \leq \max A = \beta = f(\beta)$.
- (iii) m raisonnement qu'à la question (ii).
- (iv) Appliquer le Théorème des valeurs intermédiaires à la fonction continue $x \mapsto f(x) - g(x)$.

Ex 2.

- 1) Soit $a \in A$. Alors il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{\varphi(n)} = a$. Par continuité de f on a
 $f(u_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a)$. Or par hypothèse $f(u_{\varphi(n)}) - u_{\varphi(n)+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
donc $u_{\varphi(n)+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a)$, et donc $f(a) \in A$.
D'autre part, comme $f(u_{\varphi(n)-1}) - u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ on déduit
que $f(u_{\varphi(n)-1}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$. Or la fonction $f(x) = x^2 - x$
vérifie $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, donc nécessairement la suite $(u_{\varphi(n)-1})_{n \in \mathbb{N}}$
est bornée (sinon $f(u_{\varphi(n)-1})$ ne pourrait pas converger).
Comme cette suite est bornée, on peut en extraire une
sous-suite $(u_{\varphi \circ \varphi(n)-1})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge. Si on note α sa
limite on a $f(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_{\varphi \circ \varphi(n)-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_{\varphi(n)-1}) = a$.

2) D'après la question précédente on a $f(\mu) \in A$.

Or si $\mu \neq 0$ alors $f(\mu) = \mu^2 + \mu > \mu$, ce qui contredit la définition de $\mu = \max A$.

3) on vérifie facilement que f atteint son minimum en $x = -\frac{1}{2}$ et que ce minimum vaut $-\frac{1}{4}$. Or comme $\lambda \in A$, on a par la question précédente qu'il existe $\alpha \in A$ tq $\lambda = f(\alpha)$.
Donc $\lambda \geq \min f = -\frac{1}{4}$.

Si $\alpha \neq 0$ alors $\alpha^2 + \alpha > \alpha \geq \lambda$, ce qui contredit l'égalité $\lambda = f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha$. Donc $\alpha = 0$ et par conséquent $\lambda = 0$.

Finalement $\mu = \lambda = 0$, donc $A = \{0\}$, ce qui signifie que $u_n \rightarrow 0$.