

Correction de l'interrogation écrite du mardi 16 janvier 2018

Exercice 1

Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet. On rappelle qu'un sous-ensemble  $A \subset X$  est dit dense dans  $X$  si on a  $\overline{A} = X$ . Lorsque  $A \subset X$  est non vide, on définit son diamètre par

$$\text{diam}(A) := \sup_{x, y \in A} d(x, y),$$

qui peut éventuellement être infini. Si  $x \in X$  et  $R > 0$ , on désigne par  $B(x, R)$  la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $R$  dans  $(X, d)$ .

- 1) Vérifier que si  $A \subset X$  est non vide, alors  $\text{diam}(A) = \text{diam}(\overline{A})$ .

**Réponse :** Comme  $A \subset \overline{A}$ , on a évidemment  $\text{diam}(A) \leq \text{diam}(\overline{A})$ . Pour un  $\varepsilon > 0$  fixé, si on considère l'ensemble  $A_\varepsilon := \{x \in X ; d(x, A) \leq \varepsilon\}$ , alors il est clair que  $\overline{A} \subset A_\varepsilon$  et donc  $\text{diam}(\overline{A}) \leq \text{diam}(A_\varepsilon) \leq \varepsilon + \text{diam}(A)$ . Comme  $\varepsilon > 0$  est arbitraire on en déduit que  $\text{diam}(A) = \text{diam}(\overline{A})$ .

- 2) Montrer que  $A$  est dense dans  $X$  si, et seulement si, pour tout ouvert non vide  $\Omega \subset X$  on a  $A \cap \Omega \neq \emptyset$ .

**Réponse :** Si  $A$  est dense dans  $X$ , c'est-à-dire si  $\overline{A} = X$ , alors tout point de  $X$  est adhérent à  $A$  : cela signifie que tout ouvert  $\Omega \neq \emptyset$ , qui est voisinage de chacun de ses points, rencontre  $A$ . Réciproquement si pour tout ouvert  $\Omega$  non vide on a  $A \cap \Omega \neq \emptyset$ , alors en particulier pour un point quelconque  $x_0 \in X$  et tout voisinage non vide  $\Omega$  de  $x_0$  on a  $A \cap \Omega \neq \emptyset$  : cela signifie précisément que  $x_0 \in \overline{A}$ , donc  $X \subset \overline{A} \subset X$ .

- 3) Soit  $(K_n)_{n \geq 1}$  une suite décroissante de fermés de  $X$ , c'est-à-dire  $\emptyset \neq K_{n+1} \subset K_n$ . On suppose que  $R_n := \text{diam}(K_n) \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Montrer que si  $K := \bigcap_{n \geq 1} K_n$ , alors  $K$  est réduit à un point. (En choisissant un point  $x_n \in K_n$ , on pourra montrer que  $(x_n)_{n \geq 1}$  est une suite de Cauchy, puis en déduire que  $K \neq \emptyset$ ).

**Réponse :** Comme chaque  $K_n$  est non vide, on peut fixer un élément  $x_n \in K_n$ . Maintenant, si  $j \geq 1$ , puisque  $K_{n+j} \subset K_n$ , on a  $d(x_{n+j}, x_n) \leq d(x_n, K_{n+j}) \leq \text{diam}(K_n)$ . Sachant que  $\text{diam}(K_n) \rightarrow 0$ , on conclut que la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  est une suite de Cauchy, et comme  $(X, d)$  est complet, on en déduit que  $(x_n)_n$  converge vers un point  $x_* \in X$ . Or pour tout entier  $m \geq 1$ , on a  $x_n \in K_m$  dès que  $n \geq m$  ; comme  $K_m$  est fermé on en déduit que la limite  $x_* \in K_m$ , et cela pour tout entier  $m \geq 1$ . Par conséquent  $x_* \in K$ , ce qui montre que ce dernier est non vide. D'autre part  $\text{diam}(K) \leq \text{diam}(K_n)$  pour tout  $n \geq 1$ , ce qui signifie que  $\text{diam}(K) = 0$ , et  $K$  est réduit à un point. (C'est un lemme dû à G. Cantor).

- 4) Soient  $(\Omega_n)_{n \geq 0}$  une suite d'ouverts de  $X$  tels que chaque  $\Omega_n$  soit dense dans  $X$ . On pose

$$A := \bigcap_{n \geq 0} \Omega_n.$$

On va montrer que  $A$  est dense dans  $X$ . Dans la suite on considère un ouvert non vide  $\Omega \subset X$ .

- i) Soit  $a_0 \in \Omega$  fixé et  $R_0 > 0$  tel que  $B_0 := B(a_0, R_0) \subset \Omega$ . Montrer qu'il existe  $a_1 \in B_0 \cap \Omega_0$  et  $R_1 > 0$  tels que si  $B_1 := B(a_1, R_1)$  on ait  $\overline{B_1} \subset B_0 \cap \Omega_0$  et  $R_1 \leq R_0/2$ .

**Réponse :** Comme  $\Omega_0$  est (un ouvert) dense dans  $X$ , et que  $B_0$  est un ouvert alors il existe  $a_1 \in B_0 \cap \Omega_0$ . Puisque  $B_0 \cap \Omega_0$  est un ouvert, il existe donc un nombre  $R'_1 \leq R_0/2$  tel que  $R'_1 > 0$  et la boule ouverte  $B(a_1, R'_1) \subset B_0 \cap \Omega_0$ . En prenant  $R_1 < R'_1$  on voit que  $\bar{B}_1 \subset B(a_1, R'_1) \subset B_0 \cap \Omega_0$ .

- ii) Si pour un entier  $n \geq 1$  et  $0 \leq k \leq n$ , les points  $a_k$  et les boules ouvertes  $B_k := B(a_k, R_k)$  sont construits, montrer qu'il existe  $a_{n+1} \in B_n \cap \Omega_n$  et  $R_{n+1}$  tel que  $0 < R_{n+1} \leq R_n/2$  vérifiant  $\bar{B}_{n+1} \subset B_n \cap \Omega_n$ .

**Réponse :** On procède comme à la question précédente : comme  $\Omega_n$  est un ouvert dense dans  $X$ , on peut fixer un point  $a_{n+1} \in B_n \cap \Omega_n \neq \emptyset$ , puis on sait qu'il existe  $R'_{n+1} \leq R_n/2$  tel que  $R'_{n+1} > 0$  et  $B(a_{n+1}, R'_{n+1}) \subset B_n \cap \Omega_n$ , car ce dernier est un ouvert contenant  $a_{n+1}$ . Enfin on fixe un réel positif  $R_{n+1} < R'_{n+1}$ .

- iii) En utilisant la Question 3) avec  $K_n := \bar{B}_n$ , montrer que  $A \cap \Omega \neq \emptyset$ , et en déduire que  $A$  est dense dans  $X$ .

**Réponse :** On sait que  $K := \bigcap_{n \geq 1} K_n \neq \emptyset$  est réduit à un point, et puisque  $K_{n+1} \subset \bigcap_{0 \leq j \leq n} \Omega \cap \Omega_j$ , on voit que  $K \subset A \cap \Omega$ . Cela implique donc que pour tout ouvert  $\Omega$  on a  $A \cap \Omega \neq \emptyset$ , et par conséquent  $A$  est dense dans  $X$ . (C'est le le Lemme de Baire).

- 5) Soit  $F \subset X$  un ensemble. Montrer que  $F$  est d'intérieur vide si, et seulement si,  $F^c$  est dense dans  $X$ .

**Réponse :** En effet si  $F$  est d'intérieur vide et que  $\Omega$  est un ouvert non vide de  $X$ , on sait que  $\Omega$  n'est pas contenu dans  $F$  : par conséquent on doit avoir  $F^c \cap \Omega \neq \emptyset$ , et on en déduit que  $F^c$  est dense dans  $X$ . Réciproquement si  $F^c$  est dense dans  $X$ , pour tout ouvert non vide  $\Omega$  on a  $F^c \cap \Omega$ , ce qui signifie qu'aucun ouvert non vide peut être contenu dans  $F$ , c'est-à-dire que  $F$  est d'intérieur vide.

- 6) Soit  $(F_n)_{n \geq 0}$  une suite de fermés de  $X$  tels que  $F_n$  est d'intérieur vide pour tout  $n \geq 0$ , et soit  $F := \bigcup_{n \geq 0} F_n$  leur réunion. Montrer, en utilisant la Question 4), que  $F$  est d'intérieur vide.

**Réponse :** En posant  $\Omega_n := F_n^c$ , on sait d'après la question précédente que  $\Omega_n$  est un ouvert dense dans  $X$ . D'après le lemme de Baire, c'est-à-dire le résultat de la question Question 4), on sait que  $\Omega := \bigcap_{n \geq 1} \Omega_n$  est dense dans  $X$ . Comme  $\Omega = F^c$ , en utilisant de nouveau la question précédente on conclut que  $F$  est dense dans  $X$ .

## Exercice 2

Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact. On considère une application  $f : X \rightarrow X$  vérifiant

$$(1) \quad \forall (x, y) \in X \times X, \quad x \neq y \implies d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

- 1) On pose  $\varphi(x) := d(x, f(x))$ . Vérifier que  $\varphi : X \rightarrow [0, \infty)$  est continue.

**Réponse :** Si  $x, y \in X$ , alors en utilisant l'inégalité triangulaire on a

$$\varphi(x) = d(x, f(x)) \leq d(x, y) + d(y, f(y)) + d(f(y), f(x)) \leq 2d(x, y) + \varphi(y).$$

On en déduit, en changeant les rôles joués par  $x$  et  $y$ , que  $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq 2d(x, y)$ , ce qui implique que  $\varphi$  est continue sur  $X$ .

- 2) Soit  $m := \inf_{x \in X} \varphi(x)$ . Montrer qu'il existe  $a \in X$  tel que  $\varphi(a) = m$ .

**Réponse :** Comme  $X$  est compact et  $\varphi$  est continue, cette dernière atteint son minimum sur  $X$ .

- 3) Montrer que  $a$  est l'unique point fixe de  $f$ .

**Réponse :** Si on avait  $a \neq f(a)$ , alors on aurait  $\varphi(f(a)) = d(f(a), f(f(a))) < d(a, f(a)) = \varphi(a)$ , ce qui est en contradiction avec la définition de  $a$  comme point de minimum de  $\varphi$ . On a donc  $a = f(a)$ . Par ailleurs  $f$  possède au plus un point fixe car si  $b \neq a$  était un autre point fixe on aurait  $d(a, b) = d(f(a), f(b)) < d(a, b)$ , ce qui n'est pas possible.

- 4) On fixe  $x_0 \in X$  et pour  $n \geq 0$  entier on pose  $x_{n+1} := f(x_n)$ , puis on considère la suite  $(r_n)_n$  définie par  $r_n := d(a, x_n)$ . Montrer que la suite  $(r_n)_n$  est décroissante et converge vers un réel  $\ell \geq 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

**Réponse :** On a  $r_{n+1} = d(a, x_{n+1}) = d(f(a), f(x_n)) \leq d(a, x_n) = r_n$  car  $f$  est une contraction stricte. Ainsi  $(r_n)_n$  est une suite positive ou nulle et décroissante, elle converge donc vers une limite  $\ell \geq 0$ .

- 5) Montrer qu'il existe  $z \in X$ , une valeur d'adhérence de la suite  $(x_n)_n$  telle que  $d(a, z) = \ell$ , et que si  $\ell \neq 0$  on a  $\ell = d(a, f(z)) < d(a, z)$ . En déduire que la suite  $(x_n)_n$  converge vers  $a$ .

**Réponse :** L'espace  $(X, d)$  étant compact, la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  admet au moins une valeur d'adhérence  $z \in X$ . Si  $(x_{n_k})_{k \geq 1}$  est une sous-suite qui converge vers  $z$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ , alors  $r_{n_k} = d(a, x_{n_k}) \rightarrow d(a, z)$ , et comme la suite décroissante  $(r_n)_n$  possède une seule valeur d'adhérence  $\ell$ , on doit avoir  $\ell = d(a, z)$ . On note aussi que d'une part  $d(a, f(x_{n_k})) \rightarrow d(a, f(z))$ , et que d'autre part  $d(a, f(x_{n_k})) = d(a, x_{1+n_k}) = r_{1+n_k} \rightarrow \ell$  et on a donc  $d(a, f(z)) = \ell$ . Si on avait  $\ell \neq 0$ , cela signifierait que  $a \neq z$  et donc  $\ell = d(a, f(z)) < d(a, z) = \ell$ , ce qui n'est pas possible. On a donc  $a = z$ , et ainsi la suite  $(x_n)_n$  possède une unique valeur d'adhérence,  $a$ , dans l'espace compact  $(X, d)$ . Par conséquent la suite  $(x_n)_n$  converge vers  $a$ .

- 6) En considérant  $X := [1, +\infty)$  et  $f(x) := (x^2 + 1)/x$ , montrer que l'hypothèse de compacité est nécessaire pour avoir l'existence d'un point fixe pour  $f$ .

**Réponse :** Vérifions que  $|f(x) - f(y)| < |x - y|$  si  $x \neq y$  et  $x, y \geq 1$ . En effet on peut supposer par exemple que  $x > y$ , et puis écrire

$$f(x) - f(y) = x - y + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = x - y - \frac{x - y}{xy} = \left(1 - \frac{1}{xy}\right)(x - y) < x - y,$$

car  $xy > 1$  (puisque  $x > y \geq 1$ ) et ainsi  $0 < 1 - (1/xy) < 1$ . D'autre part  $f$  ne possède pas de point fixe car  $x \geq 1$  et  $f(x) = x$  impliquerait que  $1/x = 0$ , ce qui n'est pas possible. Par conséquent l'hypothèse de compacité de l'espace métrique  $(X, d)$  est nécessaire.

---

### Exercice 3

Soit  $n \geq 2$  un entier. On désigne par  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$ , et par  $GL_n(\mathbb{R})$  le sous-ensemble des matrices inversibles d'ordre  $n$ . On fixe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et on définit l'application  $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  par  $\varphi(A) := A^{-1}BA$ .

- 1) Montrer que  $\varphi$  est différentiable en tout point  $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$  et déterminer  $\varphi'(A)H$  pour  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Réponse :** Pour  $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$  et  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $\|H\| < \|A^{-1}\|$ , on sait que  $A + H \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$  et que  $(A + H)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}HA^{-1} + O(\|H\|^2)$ . On en déduit que

$$\varphi(A + H) = \left( A^{-1} - A^{-1}HA^{-1} + O(\|H\|^2) \right) B(A + H),$$

c'est-à-dire  $\varphi(A + H) \equiv A^{-1}BA - A^{-1}HA^{-1}BA + A^{-1}BH + O(\|H\|^2)$ . On en déduit que  $\varphi$  est différentiable en tout point  $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$  et que  $\varphi'(A)H = -A^{-1}HA^{-1}BA + A^{-1}BH$ .

- 2) Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . En désignant par  $I$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on pose  $B := \lambda I$ . Déterminer dans ce cas  $\varphi'(A)$ .

**Réponse :** Si  $B = \lambda I$ , alors on a  $\varphi(A) = \lambda I$  pour tout  $A$ , et donc  $\varphi'(A) = 0$ .

- 3) On suppose qu'il existe  $A_0 \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$  telle que  $\varphi'(A_0) = 0$ . Montrer que nécessairement on doit avoir  $A_0^{-1}BA_0 = B$ , puis en déduire que  $B = \lambda I$  pour un certain  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Réponse :** Si en un point  $A_0 \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$  on a  $\varphi'(A_0) = 0$ , cela signifie que pour toute  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  on a  $A_0^{-1}HA_0^{-1}BA_0 = A_0^{-1}BH$ . Par conséquent, en prenant  $H = I$  et en simplifiant par  $A_0^{-1}$ , on déduit que  $A_0^{-1}BA_0 = B$ . On en conclut que pour toute  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  on a  $HB = BH$ , et une matrice  $B$  qui commute avec toutes les matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est nécessairement du type  $B = \lambda I$  pour un  $\lambda \in \mathbb{R}$ . En effet en prenant  $k, \ell$  fixés tels que  $1 \leq k, \ell \leq n$ , et pour  $H$  la matrice telle que  $H_{ij} = 0$  si  $i \neq k$  ou  $j \neq \ell$ , et  $H_{k\ell} = 1$ , on voit que  $B_{\ell j} = B_{ik} = 0$  lorsque  $j \neq \ell$  et  $i \neq k$ . Ainsi  $B$  doit être une matrice diagonale,  $B = \text{diag}(B_{11}, \dots, B_{nn})$ . En désignant par  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , et en prenant  $k \neq \ell$  et pour  $H$  la matrice telle que  $He_i = 0$  pour  $i \notin \{k, \ell\}$  et  $He_k = e_\ell$  et  $He_\ell = e_k$ , en calculant  $BHe_k = HBe_k$  on conclut que  $B_{\ell\ell} = B_{kk}$ , c'est-à-dire que  $B = \lambda I$  pour un certain  $\lambda \in \mathbb{R}$ . (Et ainsi  $\varphi(A) = \lambda I$  et  $\varphi'(A) = 0$  pour toute matrice  $A$ ).