

Interrogation écrite du mardi 12 décembre 2017

Nom : _____

Sujet numéro : 1

L'usage de tout dispositif électronique est interdit

Attention : cette feuille est à rendre avec votre copie

Durée 2 heures

Question de cours 1

Rappel : Les définitions que vous donnerez doivent être précises et rigoureuses.

- 1) Soit (X, d) un espace métrique. Donner la définition d'un point fixe d'une application, et celle d'une application contractante.
- 2) Donner l'énoncé précis du théorème de point fixe de Banach et l'ébauche de sa preuve.

Exercice 1

On se place dans l'espace vectoriel $E := C([-1, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues à valeurs réelles sur l'intervalle $[-1, 1]$, muni de la norme uniforme $\|f\|_\infty := \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)|$. On désigne par $\mathcal{L}(E)$ l'espace des applications continues de E dans lui-même, et on note $\check{f}(x) := f(-x)$.

- 1) Soit $L : E \rightarrow E$ l'application linéaire définie par

$$L(f)(x) := f(x) - f(-x) = (f - \check{f})(x).$$

Montrer que l'application L est continue et calculer sa norme $\|L\|_{\mathcal{L}(E)}$.

- 2) Dédurre de la question précédente que le sous-espace vectoriel des fonctions paires

$$\mathbb{P} := \{f \in E ; \forall x \in [-1, 1], f(x) = f(-x)\}$$

est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

- 3) Soit $\Phi : E \rightarrow E$ l'application définie par

$$\Phi(f)(x) := f(x)f(-x).$$

Montrer que l'application Φ est différentiable et calculer la norme de sa différentielle $\|D\Phi(f)\|$ en un point $f \in \mathbb{P}$, puis pour une fonction impaire f c'est-à-dire $\check{f} = -f$.

- 4) Soit $f_0 \in E$ la fonction définie par $f_0(x) := x$. Déterminer le noyau

$$\ker(D\Phi(f_0)) := \{h \in E ; D\Phi(f_0)(h) = 0\}$$

de la différentielle de Φ en f_0 .

Exercice 2

Sur l'espace $E := C([0, 1]; \mathbb{R})$ on considère les deux normes définies pour $f \in E$ par

$$\|u\|_\infty := \sup_{x \in [0, 1]} |u(x)|, \quad \|u\|_1 := \int_0^1 |u(x)| dx,$$

et l'application $\Phi(u) := \sin(u)$ (ce qui signifie $\Phi(u)(x) := \sin(u(x))$ pour $x \in [0, 1]$).

- 1) Montrer que $\Phi : (E, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (E, \|\cdot\|_\infty)$ est différentiable et calculer sa différentielle en un point $u \in E$. Est-ce que Φ est de classe C^2 ?
- 2) En étudiant la fonction $f(t) := \sin(t)/t$ sur \mathbb{R} montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $|\sin(t)| \leq |t|$. En déduire que l'application $\Phi : (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E, \|\cdot\|_1)$ est continue en $u_0 := 0 \in E$.
- 3) Soit $0 < \alpha < 1$. Pour $n \geq 2$, on définit la fonction h_n en posant

$$h_n(x) := \begin{cases} n^\alpha & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ a_n x + b_n & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{2}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Trouver $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ pour que $h_n \in E$, et montrer que $\|h_n\|_1 \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

- 4) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\Phi(h_n) - h_n\|_1}{\|h_n\|_1} = 1,$$

et en déduire que Φ n'est pas différentiable dans $(E, \|\cdot\|_1)$ en $u_0 := 0$.

Exercice 3

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires continues de $E \rightarrow E$. On note I l'application identité de $E \rightarrow E$, et on souhaite prouver qu'il n'existe pas d'opérateurs linéaires $A, B \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$(1) \quad AB - BA = I.$$

(On dit que l'identité n'est pas le commutateur de deux opérateurs bornés).

- 1) En supposant que (1) est vraie, montrer par récurrence sur l'entier $n \geq 0$ que l'on a (comme toujours on convient de poser $B^0 = I$)

$$(2) \quad AB^{n+1} - B^{n+1}A = (n+1)B^n.$$

- 2) Prouver que pour tout $n \geq 0$ on a

$$(n+1) \|B^n\| \leq 2 \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|B^n\|.$$

puis en déduire que si n est assez grand alors $B^n = 0$.

- 3) Montrer que si $n \geq 2$ est un entier tel que $B^n = 0$ alors on a $B^{n-1} = 0$, puis en déduire que $B = 0$, de sorte que (1) n'est pas possible.