

Interrogation écrite du mardi 7 novembre 2017

Nom : _____
Sujet numéro : 1

L'usage de tout dispositif électronique est interdit

Durée 2 heures

Question de cours 1

Rappel : Les définitions que vous donnerez doivent être précises et rigoureuses.

- 1) Donner la définition du voisinage d'un point dans un espace métrique.
- 2) Donner la caractérisation d'un ouvert dans un espace métrique en termes de voisinages.

Exercice 1

Si X est un ensemble non vide et $f : X \rightarrow X$ est une application, on dit que $a \in X$ est un point fixe de f si $f(a) = a$.

- 1) Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue. Montrer que f possède au moins un point fixe. (On pourra considérer la fonction $x \mapsto f(x) - x$).
- 2) Soient $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ deux fonctions continues telles que $f \circ g = g \circ f$. On veut montrer qu'il existe $x_* \in [0, 1]$ tel que $f(x_*) = g(x_*)$.
 - (i) Montrer que l'ensemble $A = \{a \in [0, 1] ; f(a) = a\}$ est fermé et stable par g (i.e. si $a \in A$ alors $g(a) \in A$).
 - (ii) Montrer qu'il existe $\beta \in A$ tel que $\beta = \max A$ et que $g(\beta) \leq f(\beta)$.
 - (iii) Montrer de même que $\alpha := \min A$ existe et que $g(\alpha) \geq f(\alpha)$.
 - (iv) En déduire qu'il existe $x_* \in [0, 1]$ tel que $f(x_*) = g(x_*)$.

Exercice 2

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle bornée telle que

$$u_n^2 + u_n - u_{n+1} \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$. On va prouver que $u_n \rightarrow 0$.

- 1) Soient $f(x) := x^2 + x$ et A l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$. Montrer que si $a \in A$ alors $f(a) \in A$, et qu'il existe $\alpha \in A$ tel que $f(\alpha) = a$, autrement dit que f est une surjection de A dans A et que donc ce dernier est invariant sous l'action de f .
- 2) Soient

$$\lambda := \min A = \liminf_{n \rightarrow \infty} u_n \quad \text{et} \quad \mu := \max A = \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n.$$

Montrer, en utilisant la question précédente, que $\mu = 0$.

- 3) Vérifier que nécessairement $\lambda \geq -1/4$ et qu'il existe $\alpha \in [\lambda, \mu]$ tel que $\lambda = \alpha^2 + \alpha$. En déduire d'abord que $\lambda = 0$, puis que $u_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.