

Liste des questions de cours

Lors des interrogations écrites, vous aurez au moins une question de cours parmi les questions ci-dessous. Les énoncés des définitions ou théorèmes demandés, ainsi que les preuves lorsqu'elles seront demandées, doivent être rigoureux. On pourra se reporter aux notes de cours (incomplètes mais...) disponibles sur le lien suivant :

<http://www.departement.math.uvsq.fr/pages-persos/kavian/ens>

— Question de cours 1 —

Définition d'une valeur d'adhérence pour une suite réelle $(x_n)_{n \geq 1}$, énoncé et preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass dans le cadre de la droite réelle.

— Question de cours 2 —

Définitions d'un ouvert et d'un fermé dans un espace métrique, et leurs propriétés élémentaires.

— Question de cours 3 —

Définitions d'un point adhérent, d'un point intérieur, d'un point d'accumulation.

— Question de cours 4 —

Définition de voisinage d'un point dans un espace métrique, et la caractérisation des ouverts en termes de voisinages.

— Question de cours 5 —

La preuve de la caractérisation d'un ensemble fermé en termes de son adhérence, et celle d'un ensemble ouvert en termes de son intérieur.

— Question de cours 6 —

Définition d'un ensemble compact dans un espace topologique $(X, \mathcal{C}(X))$.

La preuve du fait que si $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \leq b$, l'intervalle $[a, b]$ est compact.

— Question de cours 7 —

Une suite appartenant à un ensemble compact et ayant une unique valeur d'adhérence, converge vers cette valeur d'adhérence.

— Question de cours 8 —

La preuve du fait que si K est compact et $X \subset K$ ne possède aucun point d'accumulation, alors X est un ensemble fini.

— Question de cours 9 —

Définition d'un ensemble connexe dans \mathbb{R} , et le fait que l'adhérence d'un ensemble connexe est connexe.

Question de cours 10

La preuve du fait que si $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \leq b$, l'intervalle $[a, b]$ est connexe.

Question de cours 11

Si X et Y sont des espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ est continue, l'image d'un connexe de X est connexe dans Y . Si de plus X et Y sont séparés, l'image d'un compact de X est un compact de Y .

Question de cours 12

Si $[a, b]$ est un intervalle fermé et borné de \mathbb{R} et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors f est uniformément continue sur $[a, b]$ (énoncé et preuve du théorème de Heine).

Question de cours 13

Définition d'un point fixe, et d'une application contractante. Énoncé du théorème de point fixe de Banach et ébauche de sa preuve.

Question de cours 14

Définition d'un espace vectoriel normé, et d'un espace de Banach. Exemples d'e.v.n. et d'espace de Banach.

Question de cours 15

Opérateur linéaire continu et norme d'un opérateur linéaire continu. Exemples d'opérateurs linéaires continus et d'opérateurs non bornés.

Question de cours 16

Définition de la différentielle d'une application, et preuve de son unicité. Différentielles d'une somme d'applications, d'un produit (lorsque cela est défini), et de la composée de deux applications. Exemples de fonctions différentiables ou non différentiables.

Question de cours 17

Dérivée partielle d'une fonction de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} , gradient. Matrice jacobienne d'une fonction de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^m . Formule de Leibniz pour les dérivées d'ordre supérieur du produit de deux fonctions, et sa preuve.

Question de cours 18

Si les dérivées partielles d'une fonction $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ existent et sont continues au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}^N$, alors f est différentiable en x_0 .

Question de cours 19

Énoncé et preuve du théorème des accroissements finis pour une fonction $f : E \rightarrow F$, lorsque E et F sont des espaces de Banach et F est un espace de dimension finie.

Question de cours 20

Dérivée seconde de $f : E \rightarrow F$, et le fait que $D^2f(x_*)$ est une application bilinéaire symétrique, lorsque E et F sont des espaces de Banach et F est de dimension finie.

Question de cours 21

L'espace des fonctions $C(K; \mathbb{R})$ muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$ est un espace de Banach, lorsque K est compact.

Question de cours 22

Théorème de Weierstrass pour l'approximation d'une fonction continue $f \in C([0, 1]; \mathbb{R})$ par des polynômes.

Question de cours 23

L'ensemble $GL(E)$ des isomorphismes d'un espace de Banach E est un ouvert dans $\mathcal{L}(E)$. Exemple de calcul de la différentielle de l'application $A \mapsto A^{-1}$ définie sur $GL(E)$.