

Travaux Dirigés 3

Exercice 1. Il s'agit ici de mettre au point des programmes permettant de simuler le principe de fonctionnement du système GPS¹, ou encore le futur système européen Galileo. Dans l'étude simplifiée qui va suivre, on supposera que toutes les horloges embarquées par les satellites sont parfaitement synchronisées, et de plus on ne tiendra pas compte des effets relativistes dans la transmission et la réception des signaux.

- 1) Dans un premier temps, pour bien comprendre le principe du fonctionnement du système, on considère deux satellites S_1 et S_2 placés aux points $(-a, h)$ et (a, h) où $a > 0$ et $h > 0$ sont donnés. On supposera que a et h sont compris entre 20 000 et 25 000 kilomètres. Un point $P = (x, 0)$ du plan reçoit, aux instants t_1 et t_2 , le signal envoyé au même instant par chacun des satellites S_1 et S_2 . En désignant par τ_1 et τ_2 les temps de parcours des signaux entre les satellites et le point P , on a donc $\tau := \tau_1 - \tau_2 = t_1 - t_2$ et si c désigne la vitesse du signal

$$c\tau = \sqrt{(x+a)^2 + h^2} - \sqrt{(x-a)^2 + h^2}.$$

Ici et dans toute la suite on supposera que

$$a = 23\,500\text{km} = 2.35 \times 10^7\text{m}; \quad h = 20\,200\text{km} = 2.02 \times 10^7\text{m}; \quad c = 299\,792\,458\text{m/s}.$$

Résoudre cette équation afin d'exprimer x en fonction de τ .

- 2) Dans Scilab écrire un programme `gps-1.sci` où la fonction

$$F(x) := \frac{\sqrt{(x+a)^2 + h^2} - \sqrt{(x-a)^2 + h^2}}{c} - \tau$$

est définie, puis `tau` étant l'écart de temps entre l'arrivée des signaux, écrire une fonction `localise(tau)`, qui calcule la solution de l'équation $F(x) = 0$ par la méthode de Newton. Comparer le résultat ainsi obtenu avec la solution obtenue « algébriquement » à la question précédente.

On préviendra l'utilisateur que l'écart en temps `tau` doit être donné en microsecondes, et que la position est exprimée en mètres. Dans les calculs on prendra soin d'utiliser des unités qui conviennent. Dans Scilab la commande

```
write(%io(2), "Attention: le temps doit être donné en microsecondes")  
write(%io(2), "Attention: la position est exprimée en mètres")
```

permet d'afficher un message à l'écran. Si `x` est une variable, la commande `write(%io(2), x)` affiche la valeur de la variable `x`.

¹ *Global Positioning System*, système de positionnement mondial.

- 3) Si dans Scilab une fonction $F(x)$ est définie pour chaque variable x d'un certain type, la commande `fsolve(x0,F)` permet de résoudre l'équation $F(x) = 0$ (par une méthode itérative) en partant de x_0 . Par exemple si $a = [1, 1 ; -1, 2]$ et $b = [1 ; 2]$ on peut définir une fonction `essai(x)` et ensuite résoudre l'équation $\text{essai}(x) = 0$ avec

```
a = [1, 1 ; -1, 2] ;
b = [1 ; 2] ;
deff('y = essai(x)', 'y = a*x + b') ;
fsolve([0 ; 0],essai)
```

Ecrire un programme `gps-droite.sci`, la fonction F étant définie comme ci-dessus, où on résout l'équation $F(x) = 0$ par la commande `fsolve` et comparer le résultat avec celui obtenu avec le programme `gps-1.sci`.

- 4) On suppose maintenant que trois satellites $S_1 = (-a, 0, h)$, $S_2 = (a, 0, h)$ et $S_3 = (0, b, h)$ sont à disposition et que le point à localiser est $P = (x, y, 0)$. Les temps de parcours du signal partant de S_j jusqu'à P étant noté τ_j , on suppose connu $\tau_{12} := \tau_1 - \tau_2$, et $\tau_{23} := \tau_2 - \tau_3$. Ecrire les deux équations reliant les coordonnées x, y à $a, b, h, \tau_{12}, \tau_{23}$.

- 5) En posant

$$F(x, y) := \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + h^2} - \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + h^2}}{c} - \tau_{12} \\ \frac{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + h^2} - \sqrt{x^2 + (y-b)^2 + h^2}}{c} - \tau_{23} \end{pmatrix}$$

calculer la matrice dérivée $DF(x, y)$.

- 6) Dans Scilab écrire un programme `gps-plan.sci` où on résout l'équation $F(x, y) = (0, 0)$ d'abord par la méthode de Newton, puis en utilisant la commande `fsolve`. On pourra prendre

$$a := 23\,500\text{km}, \quad b := 26\,500\text{km}, \quad h := 20\,200\text{km}.$$

- 7) Généraliser l'étude précédente au cas de la localisation d'un point $P = (x, y, z)$ de \mathbb{R}^3 en supposant que quatre satellites $S_1 = (-a, 0, h)$, $S_2 = (a, 0, h)$, $S_3 = (0, b, h)$ et $S_4 = (0, -b, h)$ sont à disposition.