Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines

Laboratoire de Mathématiques de Versailles (UMR 8100) CNRS

Mémoire en vue d'obtenir une

Habilitation à Diriger des Recherches

Spécialité : Mathématiques appliquées et applications des mathématiques

"Contributions aux oscillations presque-périodiques d'équations d'évolution"

présenté par

Philippe CIEUTAT

Après avis des rapporteurs :

M. Mostafa ADIMY: Directeur de Recherche, INRIA Lyon
M. Joël BLOT: Professeur, Université Paris 1
M. Toka DIAGANA: Professeur, Howard University (USA)

soutenue le 02 février 2015, devant le jury composé de :

M. Mostafa ADIMY: Directeur de Recherche, INRIA Lyon (Rapporteur)
M. Jean-Bernard BAILLON: Professeur émérite, Université Paris 1
M. Joël BLOT: Professeur, Université Paris 1 (Présentateur)
M. Laurent DUMAS: Professeur, Université Versailles St-Quentin
M. Jean-Pierre FRANÇOISE: Professeur, Université Paris 6
M. Otared KAVIAN: Professeur, Université Versailles St-Quentin (Tuteur)
M. Yvan MARTEL: Professeur, École Polytechnique

A mes enfants Camille et Aurélien
A mon épouse Michèle

Remerciements

Je tiens à remercier mon ami Joël Blot, Professeur à l'Université Paris 1 - Panthéon-Sorbonne, qui a été le premier à se confronter à mon mémoire, d'avoir accepté de présenter mon dossier d'HDR. Je lui dois énormément et le remercie très chaleureusement pour la confiance qu'il m'accorde continuellement.

J'adresse ma toute ma reconnaissance à Mostafa Adimy, Directeur de Recherche à l'INRIA -Lyon et à Toka Diagana, Professeur à l'Université d'Horward (USA) en acceptant la lourde tache de rédiger un rapport sur mon mémoire d'HDR. Je les remercie aussi d'avoir spontanément exprimé le désir de se déplacer pour la soutenance ; mais à mon grand regret il n'a pas été possible que Toka Diagana soit présent le jour de la soutenance.

Un grand merci à Otared Kavian, Professeur à l'Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, pour son soutien et tous ses encouragements. Je le remercie aussi pour sa confiance d'avoir accepté d'être mon tuteur auprès de notre université.

Je remercie Jean-Bernard Baillon, Professeur émérite à l'Université Paris 1 - Panthéon-Sorbonne d'avoir accepté de juger mon travail et de faire partie du jury. Jean-Bernard Baillon m'avait déjà fait l'honneur de présider le jury de ma thèse de doctorat.

Mes vifs remerciements à Laurent Dumas, Professeur à l'Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yveline, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'être membre du jury.

Un grand remerciement à Jean-Pierre Françoise, Professeur à l'Université Paris 6 - Pierre et Marie Curie, pour l'honneur qu'il m'a fait en présidant le jury. Je lui exprime ma profonde reconnaissance.

Je remercie Yvan Martel, Professeur à l'Ecole Polytechnique, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de faire partie du jury et pour le soutien et l'intérêt qu'il a porté à mon travail lorsqu'il était directeur du Laboratoire de Mathématiques de Versailles.

Je remercie chaleureusement Laure Frerejean pour son aide efficace pour l'organisation de cette soutenance, sans oublier évidemment le pot de soutenance. J'ai bénéficié au Laboratoire de Mathématiques de Versailles d'un environnement particulièrement sympathique. Je salue ici tous les membres du laboratoire. Un grand merci à tous les directeurs de mon laboratoire : Jean-Pierre Puel, Yvan Martel et Catherine Donati-Martin qui m'ont facilité la tâche.

Je tiens aussi à remercier mes co-auteurs : E. Ait Dads, M. Ayachi, J. Blot, S. Boudjema, C. Buşe, K. Ezzinbi, S. Fatajou, A. Haraux, L. Lhachimi, J. Mawhin, G. N'Guérékata et D. Pennequin. Vous m'avez beaucoup apporté et aussi contribué à cette habilitation.

Pour conclure, merci à tous ceux que je n'ai pas remerciés.

Table des matières

1. Articles publiés dans des revues internationales à comité de lecture

1.1. Publications issues de ma thèse de doctorat.

[1] **P. Cieutat**, *Un principe variationnel pour une équation d'évolution parabolique*, C.R. Math. Acad. Sci. Paris **318** (1994), 995-998.

[2] J. Blot, **P. Cieutat**, J. Mawhin, *Almost-periodic oscillations of monotone second-order systems*, Adv. Differential Equations **2** (1997), 693-714.

[3] **P. Cieutat**, A. Haraux, *Exponential decay and existence of almost periodic solutions for some linear forced differential equations*, Port. Math. **59** (2002), 141-159.

1.2. Travaux présentés dans ce document.

[4] **P. Cieutat**, *Bounded and almost periodic solutions of convex Lagrangian systems*, J. Differential Equations **190** (2003), 108-130.

[5] **P. Cieutat**, *Almost periodic solutions of second-order systems with monotone fields on a compact subset*, Nonlinear Anal. **53** (2003), 751-763.

[6] **P. Cieutat**, *Maximum principle and existence of almost-periodic solutions of second-order differential systems*, Differential Integral Equations **17** (2004), 921-942.

[7] **P. Cieutat**, *On the structure of the set of bounded solutions on an almost periodic Liénard equation*, Nonlinear Anal. **58** (2004), 885-898.

[8] **P. Cieutat**, *Almost periodic solutions of forced vectorial Liénard equations*, J. Differential Equations **209** (2005), 302-328.

[9] **P. Cieutat**, *Necessary and sufficient conditions for existence and uniqueness of bounded or almost-periodic solutions for differential systems with convex potential*, Differential Integral Equations **18** (2005), 361-378.

[10] E. Ait Dads, **P. Cieutat**, L. Lhachimi, *Structure of the set of bounded solutions and existence of pseudo almost-periodic solutions of a Liénard equation*, Differential Integral Equations **20** (2007), 793-813.

[11] E. Ait Dads, **P. Cieutat**, K. Ezzinbi, *The existence of pseudo-almost periodic solutions for some nonlinear differential equations in Banach spaces*, Nonlinear Anal. **69** (2008), 1325-1342.

[12] **P. Cieutat**, S. Fatajou, G.M. N'Guérékata, *Bounded and almost automorphic solutions of a Liénard equation with a singular nonlinearity*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. **21** (2008), 1-15.

[13] E. Ait Dads, **P. Cieutat**, L. Lhachimi, *Positive almost automorphic solutions for some nonlinear infinite delay integral equations*, Dynam. Systems Appl. **17** (2008), 515-538.

[14] J. Blot, **P. Cieutat**, G.M. N'Guérékata, D. Pennequin, *Superposition operators between various almost periodic function spaces and applications*, Commun. Math. Anal. **6** (2009), 42-70.

[15] **P. Cieutat**, S. Fatajou, G.M. N'Guérékata, *Bounded and almost automorphic solutions of some nonlinear differential equation in Banach spaces*, Nonlinear Anal. **71** (2009), 674-684.

[16] E. Ait Dads, **P. Cieutat**, L. Lhachimi, *Positive pseudo almost periodic solutions for some nonlinear infinite delay integral equations*, Math. Comput. Modelling **49** (2009), 721-739.

[17] **P. Cieutat**, K. Ezzinbi, *Existence, uniqueness and attractiveness of a pseudo almost automorphic solutions for some dissipative differential equations in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **354** (2009), 494-506.

[18] E. Ait Dads, **P. Cieutat**, L. Lhachimi, *Existence of positive almost periodic or ergodic solutions for some neutral nonlinear integral equations*, Differential Integral Equations **22** (2009), 1075-1096.

[19] E. Ait Dads, **P. Cieutat**, S. Fatajou, *Pseudo almost automorphic solutions for some nonlinear differential equations : Liénard equations and Hamiltonian systems*, Int. J. Evol. Equ. **4** (2010), 191-211.

[20] **P. Cieutat**, S. Fatajou, G.M. N'Guérékata, *Composition of pseudo almost periodic and pseudo almost automorphic functions and applications to evolution equations*, Appl. Anal. **89** (2010), 11-27.

[21] J. Blot, **P. Cieutat**, G.M. N'Guérékata, *Dependence results on almost periodic and almost automorphic solutions of evolution equations*, Electron. J. Differential Equations **101** (2010), 1-13.

[22] **P. Cieutat**, K. Ezzinbi, *Almost automorphic solutions for some evolution equations through the minimizing for some subvariant functional, applications to heat and wave equations with nonlinearities*, J. Funct. Anal. **260** (2011), 2598-2634.

[23] M. Ayachi, J. Blot, **P. Cieutat**, *Almost periodic solutions of monotone second-order differential equations*, Adv. Nonlinear Stud. **11** (2011), 541-554.

[24] **P. Cieutat**, K. Ezzinbi, *Positive pseudo almost automorphic solutions for some nonlinear infinite delay integral equations*, Afr. Diaspora J. Math. **12** (2011), 19-33.

1.3. **Autres publications.**

[25] J. Blot, **P. Cieutat**, G.M. N'Guerekata, *S-asymptotically ω-periodic functions and applications to evolution equations*, Afr. Diaspora J. Math. **12** (2011), 113-121.

[26] J. Blot, **P. Cieutat**, K. Ezzinbi, *Measure theory and pseudo almost automorphic functions, new developments and applications*, Nonlinear Anal. **75** (2012), 2426-2447.

[27] J. Blot, **P. Cieutat**, K. Ezzinbi, *New approach for weighted pseudo-almost periodic functions under the light of measure theory, basic theory and applications*, Appl. Anal. (2013), 493-526.

[28] J. Blot, S. Boudjema, **P. Cieutat**, *Several kinds of oscillations in forced Liénard equations*, Bound. Value Probl. (2013), 2013 :66, 11 pp.

[29] J. Blot, S. Boudjema, **P. Cieutat**, *Dependence results for S-asymptotically periodic solutions of evolution equations*, Nonlinear Stud. **20** (2013), 295-307.

[30] J. Blot, C. Buşe, **P. Cieutat**, *Local attractivity in nonautonomous semilinear evolution equations*, Nonauton. Dyn. Syst. **1** (2014), 72-82.

2. **Introduction**

Les fonctions presque-périodiques ne sont pas des perturbations de fonctions périodiques, mais sont des superpositions de fonctions périodiques qui n'ont pas de période commune. Elles formalisent des oscillations dont les fréquences ne peuvent se réduire à une seule fréquence de base. Les fonctions presque-périodiques au sens de Bohr sont les limites uniformes sur toute la droite réelle de polynômes trigonométriques de la forme

$$P_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k \mathrm{e}^{i\lambda_k t}$$

où l'ensemble des fréquences $\{\lambda_n\,;\, n \in \mathbb{Z}\}$ est une suite numérique quelconque. Par exemple la fonction numérique f définie par $f(t) = \cos(t) + \cos(2\pi t)$ est presque-périodique sans être périodique (les périodes 2π et 1 sont en rapport irrationnel). Parmi la classe des fonctions presque-périodiques, les fonctions quasi-périodiques qui ont été introduites par l'astronome Ernest Esclangon [77], sont les fonctions dont le module des fréquences est de type fini, c'est-à-dire qu'il existe une base fréquentielle $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_p)$ où les fréquences sont réduites à $\lambda_k = \sum_{j=1}^{p} m_j^k \omega_j$ avec $(m_1^k, \cdots, m_p^k) \in \mathbb{Z}^p$. Elles sont aussi appelées par certains auteurs "fonctions multi-fréquentielles" pour insister sur la différence avec les fonctions T-périodiques qui ne sont que mono-fréquentielles, c'est-à-dire que le module des fréquences est réduit à $\{nT\,;\, n \in \mathbb{N}\}$. Le terme "presque" apparaissant dans le nom de ces fonctions traduit le fait qu'elles possèdent de nombreuses presque-périodes. Pour une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, l'ensemble des presque-périodes associé à $\varepsilon > 0$ est l'ensemble défini par

$$P_\varepsilon = \{T \in \mathbb{R}\,;\, \forall t \in \mathbb{R}, \quad |f(t+T) - f(t)| \leq \varepsilon\}\,.$$

Une autre définition équivalente des fonctions presque-périodiques au sens de Bohr est celle qui traduit qu'elles ont de nombreuses presque-périodes. Une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est presque-périodique, si pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble P_ε est relativement dense, c'est-à-dire il existe $\ell > 0$ tel que tout intervalle de longueur ℓ contienne au moins un point de P_ε.

Les solutions presque-périodiques apparaissent dans les équations d'évolution dès qu'il y a une superposition de solutions périodiques avec des périodes indépendantes.

Pour une équation différentielle ordinaire linéaire autonome à coefficients constants en dimension finie, dès que deux valeurs propres ont une partie réelle nulle, si le rapport de leurs parties imaginaires n'est pas rationnel, on obtient une solution sous forme d'un polynôme trigonométrique non périodique qui est presque-périodique. Pour ces équations toutes les solutions bornées sont presque-périodiques. Cette situation intervient lorsque l'on couple deux oscillateurs harmoniques (système masse-ressort, oscillateur électrique LC). En mécanique classique, pour un système masse-ressort soumis à une force extérieure périodique, le mouvement de ce dernier est presque-périodique si la période propre du système est indépendante de celle de la force extérieure.

En mécanique céleste, même si on considère que le mouvement de chaque planète est périodique, le système solaire est presque-périodique dans son ensemble car il n'y a bien sûr aucune raison que les périodes des différentes planètes soient en rapports rationnels.

Dans le cadre des équations aux dérivées partielles de type hyperbolique, Sobolev a établi que la solution générale de certaines équations des ondes linéaires est presque-périodique [131]-[133].

Une théorie importante impliquant les fonctions presque-périodiques est la théorie KAM. L'enjeu initial de cette théorie, initiée par Kolmogorov en 1954, puis développée, quelques années plus tard par Arnold et Moser, est l'étude de la conservation sous perturbation des tores invariants d'un système hamiltonien sur lesquels la dynamique est quasi-périodique.

L'une des propriétés importantes des fonctions presque-périodiques au sens de Bohr est d'admettre un développement en série de Fourier généralisé :

$$f \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \mathrm{e}^{i\lambda_n t}$$

où les coefficients de Fourier-Bohr vérifient la relation : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < +\infty$. Contrairement au cas périodique, le module des fréquences $\{\lambda_n\,;\, n\in\mathbb{Z}\}$ peut avoir 0 comme point d'accumulation, c'est ce que l'on appelle le problème des petits diviseurs.

L'extension au cas presque-périodique des résultats connus pour l'existence de solutions périodiques d'équations différentielles n'est pas uniquement une généralisation obtenue par la résolution de difficultés techniques importantes dues à la manipulation d'une définition plus compliquée.

La différence entre le cas périodique et le cas presque-périodique se manifeste déjà dans le problème simple de la primitivation. Alors qu'une fonction périodique a une primitive périodique si et seulement si elle est de valeur moyenne nulle, il est facile de construire une fonction presque-périodique de moyenne nulle (au sens des fonctions presque-périodiques) et dont aucune primitive n'est presque-périodique. C'est une des manifestations les plus élémentaires du problème des petits diviseurs.

Il est aussi possible de construire une fonction continûment dérivable et presque-périodique, dont la dérivée n'est pas presque-périodique. Par contre, si une fonction f est continûment dérivable et T-périodique, alors sa dérivée est T-périodique et vérifie

$$f \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \mathrm{e}^{in\frac{2\pi}{T}t} \quad , \quad f' \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} in\frac{2\pi}{T} a_n \mathrm{e}^{in\frac{2\pi}{T}t} \quad \text{et} \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |a_n|^2 < +\infty;$$

et on obtient l'inégalité de Poincaré :

$$\frac{4\pi^2}{T^2}\|f\|^2_{L^2(0,T)} = \frac{4\pi^2}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2 \le T\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|in\frac{2\pi}{T}\right|^2 |a_n|^2 = \|f'\|^2_{L^2(0,T)} < +\infty.$$

Sans restreindre très fortement la classe des fonctions presque-périodiques étudiée, il n'est pas possible de généraliser cette inégalité de Poincaré, ce qui est encore une conséquence du problème des petits diviseurs.

En fait, les méthodes d'analyse fonctionnelle non linéaire (analytiques, topologiques ou variationnelles) qui sont efficaces pour des problèmes périodiques ne se généralisent pas simplement ou ne réussissent qu'au prix de difficultés considérables lorsqu'on veut les appliquer à des problèmes presque-périodiques. Par exemple, Rafael Ortega a déterminé des classes d'équations différentielles sur lesquelles les méthodes de continuation utilisant le degré de Lauray-Schauder sont efficaces pour obtenir des solutions périodiques, mais ne peuvent pas s'appliquer dans le cas presque-périodique (cf. [116]).

Les différentes caractérisations ou propriétés des fonctions presque-périodiques utilisent la convergence uniforme sur toute la droite réelle, tandis que le théorème d'Ascoli-Arzela fournit des conditions de compacité seulement pour la topologie de la convergence compacte, ce qui rend son utilisation délicate. L'analogue du théorème d'Ascoli-Arzela dans l'espace des fonctions presque-périodiques au sens de Bohr est le théorème de Lusternik ([103], p. 7) dont la condition d'équi-presque périodicité est difficile à vérifier.

La préhistoire de la notion de presque-périodicité débute pour la première fois dans des travaux de Piers Böhl et d'Ernest Esclangon [56], [77]. Le papier d'Esclangon aux Annales de l'Observatoire de Bordeaux de 1905 introduit une notion qui relève de la presque-périodicité pour rendre compte du mouvement des planètes [78]. Cette notion est aujourd'hui appelée la quasi-périodicité.

L'histoire des fonctions presque-périodiques commence en 1925-1926 avec Harald Bohr (successeur de Hilbert à la chaire d'Analyse de Göttingen) qui introduit la notion de fonctions presque-périodiques et aussi une théorie des séries de Fourier généralisées pour ces fonctions [57]-[60].

À partir de 1928, Jean Favard établit des résultats sur les solutions presque-périodiques au sens de Bohr d'équations différentielles ordinaires linéaires [80]-[82]. Ces résultats, qui ont été généralisés à des équations aux dérivées partielles non linéaires, sont la base de ce qu'on appelle aujourd'hui la "théorie de Favard".

Toujours dans les mêmes années, Abram Besicovitch introduit une généralisation de la notion de Bohr pour obtenir la synthèse harmonique des séries de Fourier-Bohr [44]. Pour cela, il a construit des espaces de Hilbert contenant les fonctions presque-périodiques au sens de Bohr. Cette notion est aujourd'hui appelée la presque-périodicité au sens de Besicovitch.

Après cette première phase, il y a eut des contributions fondamentales de Salomon Bochner [53, 54]. Notamment il a donné une caractérisation de la presque-périodicité au sens de Bohr beaucoup plus maniable mathématiquement, en terme de compacité de sous-ensembles de l'espace des fonctions continues et bornées. Bochner a aussi créé les fonctions presque-automorphes qui sont une généralisation des fonctions presque-périodiques.

Une autre généralisation des fonctions presque-périodiques est due à Maurice Fréchet, ce sont les fonctions asymptotiquement presque-périodiques [85].

D'autres généralisations sont dues à John von Neumann : extension de la presque-périodicité aux fonctions définies sur des groupes topologiques [55], [135], à Lev Pontryagin : connexion entre les séries de Fourier-Bohr et la dualité dans les groupes topologiques [119], à Shizuo Kakutani, avec Anzai : définition du compacifié de Bohr [40, 41], à André

Weil une autre définition du compacifié de Bohr [136], à Laurent Schwartz : définition des distributions presque-périodiques [127], et beaucoup d'autres ...

Pour les solutions des équations différentielles ordinaires, il existe beaucoup de travaux sur les solutions presque-périodiques. Une synthèse importante est un livre de Fink [84] dans les années 1970. Pour les équations aux dérivées partielles, une importante contribution est notamment due à Amerio [33], Prouse [120, 121], Biroli [46], Haraux [93], Pankov [117], Ishii [95] et Dafermos [72].

Les développements de la notion de presque-périodicité ou de ses généralisations peuvent se trouver dans les livres d'Amerio-Prouse [39], de Cheban [69], de Corduneanu [70, 71], de Diagana [73, 74], de Hino-Naito-Minh-Shin [94], de Levitan-Zhikov [103], de N'Guérékata [109, 110], de Pankov [117], de Yoshizawa [139], de Zaidman [140] et de Zhang [144].

Dans ce mémoire, j'ai présenté l'ensemble de mes articles depuis ma thèse de doctorat jusqu'à ceux publiés avant le début de la rédaction de ce mémoire.

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire sont consacrés à l'étude des solutions presque-périodiques d'équations différentielles ou intégrales non autonomes. Les généralisations de ces solutions : asymptotiquement presque-périodiques, pseudo presque-périodiques, presque-automorphes et pseudo presque-automorphes ont été aussi considérées. Ces travaux portent sur l'existence de solutions presque-périodiques, sur la dépendance continue ou différentiable de ces solutions par rapport à un paramètre et sur l'étude qualitative de ces solutions. Cette étude qualitative est essentiellement la description de l'ensemble des solutions presque-périodiques, l'étude de la presque-périodicité de certaines solutions bornées ou le comportement asymptotique des solutions bornées. Des résultats sur les propriétés des opérateurs de superposition entre divers espaces de fonctions presque-périodiques ont été aussi développés, ce qui a permis d'obtenir des résultats d'existence ou de dépendance par rapport à un paramètre.

Les équations étudiées sont premièrement des équations différentielles ordinaires : des systèmes gradient, des équations d'Euler-Lagrange ou des équations du second ordre, notamment des équations de Liénard ; deuxièmement des équations aux dérivées partielles du type équation de la chaleur ou équation des ondes non linéaires soumises à des oscillations presque-périodiques ; et troisièmement des équations intégrales ou différentielles avec un retard, issues de modèles épidémiologiques.

Les outils mathématiques utilisés relèvent d'une part de la théorie des fonctions presque-périodiques et de leurs généralisations, des équations différentielles presque-périodiques et, d'autre part, de l'analyse fonctionnelle appliquée : analyse convexe, théorèmes de continuation, théorie des points fixes sur des espaces de Banach ordonnés par des cônes, théorie des semi-groupes ou des opérateurs maximaux monotones.

Ce mémoire est divisé en quatre parties.

La première partie est consacrée à l'étude des opérateurs de superposition entre divers espaces de fonctions presque-périodiques, puis à l'application de ces résultats pour obtenir des conditions d'existence, de dépendance continue ou différentiable des solutions presque-périodiques d'équations d'évolution dépendant d'un paramètre.

Dans la deuxième partie, nous étudions les solutions presque-périodiques d'équations différentielles ordinaires non linéaires et forcées par des oscillations presque-périodiques. Les équations considérées sont des systèmes gradient, des équations d'Euler-Lagrange et des équations du second ordre, notamment des équations de Liénard. Cette étude porte sur la description des solutions bornées ou presque-périodiques, et sur le comportement asymptotique des solutions bornées, notamment nous établissons des résultats d'existence de solutions presque-périodiques.

Les résultats de la troisième partie sont essentiellement des conditions suffisantes pour l'existence de solutions presque-automorphes ou pseudo presque-automorphes. Pour les solutions presque-automorphes des équations différentielles ordinaires ou des équations aux dérivées partielles de type équation de la chaleur ou équation des ondes, la principale condition suffisante est l'existence et l'unicité d'une solution à valeurs dans un compact qui minimise une fonctionnelle. Ces résultats ne pouvant s'étendre aux solutions pseudo presque-automorphes, nous avons utilisé une autre approche pour obtenir des résultats d'existence et d'unicité.

Enfin, la quatrième partie est consacrée à l'existence de solutions positives et presque-périodiques d'équations intégrales ou différentielles avec un retard issue de modèles épidémiologiques. Les solutions asymptotiquement presque-périodiques, faiblement presque-périodiques, pseudo presque-périodiques, presque-automorphes et pseudo presque-automorphes ont été aussi étudiés.

Première partie 1. Opérateurs de superposition et applications

Nous décrivons les principaux résultats des articles [9, 14, 20, 21]. Lorsqu'une équation d'évolution dépend d'un paramètre, sa solution presque-périodique (si elle existe) dépend aussi de ce paramètre. Cette partie répond à la question de savoir à quelles conditions les solutions dépendent continûment de ce paramètre et à quelles autres conditions cette dépendance est différentiable. Pour cela nous avons développé une étude sur les opérateurs de Nemytskii (appelé aussi opérateur de superposition) entre divers espaces de fonctions presque-périodiques. Ces résultats sur les opérateurs de Nemytskii ont aussi permis d'établir l'existence de solutions presque-périodiques d'équation d'évolution.

Dans cette partie X et Y sont deux espaces de Banach. Soit $f : \mathbb{R}\times X \to Y$ une application. Désignons par $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ (resp. $\mathcal{F}(\mathbb{R}, Y)$) l'espace des fonctions presque-périodiques, presque-automorphes, pseudo presque-périodiques ou pseudo presque-automorphes à valeurs dans X (resp. Y) muni de la norme de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. L'opérateur

$$\mathcal{N}_f : \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, Y)$$

défini par

$$\mathcal{N}_f(u) = [t \mapsto f(t, u(t))]$$

est appelé l'opérateur de Nemytskii de f. Nous étudions ces opérateurs de Nemytskii, notamment nous répondons à ces questions : quelles hypothèses doit vérifier f pour que

1- l'opérateur de Nemytskii $\mathcal{N}_f$ soit bien défini, c'est-à-dire que
$[t \mapsto f(t, u(t))] \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, Y)$, pour tout $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ (résultat de composition),

2- l'opérateur de Nemytskii $\mathcal{N}_f$ soit continu, différentiable ?

Ensuite, nous utilisons cette étude pour établir des résultats d'existence de solutions d'équations d'évolution.

Dans la littérature, pour l'étude de l'existence et de l'unicité d'une solution presque-périodique (ou un autre type de solution) d'une équation d'évolution, les auteurs ont souvent recours au théorème de Banach (point fixe de contraction), ce qui implicitement utilise le fait qu'un opérateur de Nemytskii $\mathcal{N}_f$ est lipschitzien, lorsque f est lipschitzienne par rapport à $x \in X$, uniformément par rapport à $t \in \mathbb{R}$. Ce dernier fait est évident, par contre les résultats de continuité des opérateurs de Nemytskii sont plus délicats à établir. Ensuite, nous donnerons des exemples sur des équations d'évolution où les opérateurs de Nemytskii sont continus, sans être lipschitzien.

L'étude des propriétés des opérateurs de Nemytskii est faite dans l'article [14], écrit en collaboration avec J. Blot, G.M. N'Guérékata et D. Pennequin, sur divers espaces de fonctions presque-périodiques ou de leurs généralisations. Dans ce document, nous présentons uniquement l'étude sur les espaces de fonctions presque-périodiques et presque-automorphes. Dans l'article [21] écrit en collaboration avec J. Blot et G.M. N'Guérékata, nous utilisons ces dernières propriétés des opérateurs de Nemytskii pour étudier la dépendance (continue ou différentiable) de la solution presque-périodique d'une équation d'évolution en fonction d'un paramètre. L'étude de cette dépendance est aussi faite sur d'autres espaces. Dans l'article [20] écrit en collaboration avec S. Fatajou et G.M. N'Guérékata, nous étudions les propriétés des opérateurs de Nemytskii sur les espaces de fonctions pseudo presque-périodiques et sur les espaces de fonctions pseudo presque-automorphes, puis nous appliquons ces résultats à une équation de la chaleur.

Dans le dernier paragraphe, nous présentons les résultats de l'article [9] qui sont des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence et l'unicité d'une solution bornée ou presque-périodique d'un système gradient convexe. Contrairement aux autres paragraphes, les opérateurs de Nemytskii n'apparaissent qu'implicitement.

3. Fonctions presque-périodiques

Nous commençons par rappeler la définition d'une fonction presque-périodique due à Bohr [60].

Définition 3.1. *Une application continue $u : \mathbb{R} \to X$ est dite presque-périodique (p.p.) au sens de Bohr, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $l > 0$ tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe $\tau \in [\alpha, \alpha + l]$ tels que*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t+\tau) - u(t)\| \leq \varepsilon.$$

L'ensemble des fonctions p.p. à valeurs dans X est noté $AP(X)$.

Remarque 3.2. *L'ensemble des valeurs d'une fonction p.p. est relativement compact, donc cette fonction est bornée.*

La définition suivante est due à Yoshizawa cf. (Definition 2.1, p. 5, [139]).

Définition 3.3. *Une application continue $f : \mathbb{R}\times X \to Y$ est dite p.p. en t uniformément par rapport à $x \in X$, si pour tout compact K de X et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $l > 0$ tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe $\tau \in [\alpha, \alpha + l]$ tels que*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{x\in X} \|f(t+\tau, x) - f(t, x)\| \leq \varepsilon.$$

L'ensemble des fonctions p.p. en t uniformément par rapport à $x \in X$ est noté $AP_U(\mathbb{R} \times X, Y)$.

La notion de presque-périodicité en t uniformément par rapport à $x \in X$ peut-être caractérisée par la notion de presque-périodicité (sans paramètre) au sens de la définition 3.1. Pour $f \in C(\mathbb{R} \times X, Y)$ et K un compact de X, notons par f^K, l'application définie par :

$$f^K : \mathbb{R} \to C(K, Y) \text{ avec } f^K(t) = f(t, \cdot).$$

L'espace $C(K, Y)$ muni de la norme de la convergence uniforme sur K est un espace de Banach.

Lemme 3.4 (Lemma 3.3, [14])**.** *Soit $f \in C(\mathbb{R} \times X, Y)$. Alors $f \in AP_U(\mathbb{R} \times X, Y)$ si et seulement si pour tout compact K de X, $f^K \in AP(C(K, Y))$.*

Cette caractérisation permet d'établir des propriétés sur les fonctions p.p. en t uniformément par rapport à $x \in X$ en utilisant celles des fonctions p.p. (sans paramètre). Pour définir l'opérateur de Nemytskii de f, il nécessaire de donner un théorème de composition.

Théorème 3.5 (Lemma 3.4, [14])**.** *Si $u \in AP(X)$ et $f \in AP_U(\mathbb{R} \times X, Y)$, alors $[t \mapsto f(t, u(t))] \in AP(Y)$.*

Remarque 3.6. *Le théorème 3.5 a été démontré par Yoshizawa (Theorem 2.7, p. 16,* [139]*) lorsque X et Y sont des espaces de dimension finie. Cette dernière démonstration ne peut pas être étendue à des espaces de Banach généraux, puisque un argument de séparabilité sur X a été utilisé par Yoshizawa.*

La caractérisation du lemme 3.4 permet de fournir une démonstration simple du théorème 3.5 en utilisant un résultat connu de composition de fonctions p.p. dans des espaces de Banach généraux. Commençons par citer ce résultat que l'on peut trouver par exemple dans le livre d'Amerio-Prouse (IX, p. 10, [39]).

Lemme 3.7. *Soit D une partie de X. Si $g \in C(D,Y)$ et $v \in AP(X)$ tel que $\overline{v(\mathbb{R})} \subset D$, alors $g \circ v \in AP(Y)$.*

Nous donnons ici le plan de la démonstration du théorème 3.5. Soit $u \in AP(X)$. Notons $K = \overline{u(\mathbb{R})}$, K est donc un compact. On obtient le résultat en appliquant le lemme 3.7 aux applications

$$v : \mathbb{R} \to C(K,Y) \times X \text{ avec } v(t) = \left(f^K(t), u(t)\right),$$
$$g : C(K,Y) \times K \to Y \text{ avec } g(w,x) = w(x).$$

En effet le lemme 3.4 permet d'affirmer que l'application v est p.p. (au sens de la définition 3.1). De plus $\overline{v(\mathbb{R})} \subset C(K,Y) \times K$ et g est continue, donc $g \circ v \in AP(Y)$ avec $g \circ v(t) = f(t, u(t))$, d'où la conclusion.

Ainsi pour $f \in AP_U(\mathbb{R} \times X, Y)$, l'opérateur de Nemytskii

$$\mathcal{N}_f : AP(X) \to AP(Y) \text{ avec } \mathcal{N}_f(u) = f(\cdot, u(\cdot)) \tag{3.1}$$

est bien défini. Les espaces $AP(X)$ et $AP(Y)$ sont munis de la norme de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$; ainsi ce sont des espaces de Banach. Avant d'étudier les propriétés de l'opérateur de Nemytskii, nous donnons une autre caractérisation des fonctions p.p. en t uniformément par rapport à $x \in X$.

Théorème 3.8 (Opial, [113])**.** *Soit $f : \mathbb{R} \times X \to Y$ une application. Alors $f \in AP_U(\mathbb{R} \times X, Y)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*
i) $\forall x \in X,\ f(\cdot, x) \in AP(Y)$,
ii) pour tout compact K de X, f est uniformément continue sur $\mathbb{R} \times K$.

Pour la suite, nous avons besoin d'une caractérisation plus fine, plus précisément affaiblir la condition ii) du théorème 3.8.

Proposition 3.9 (Lemma 2.6, [20])**.** *Soit $f : \mathbb{R} \times X \to Y$ une application. Alors $f \in AP_U(\mathbb{R} \times X, Y)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*
i) $\forall x \in X,\ f(\cdot, x) \in AP(Y)$,
ii) pour tout compact K de X, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x_1,\ x_2 \in K$,

$$\|x_1 - x_2\| \leq \delta \implies \|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq \varepsilon.$$

Remarque 3.10. *La démonstration de la réciproque de la proposition 3.9 se trouve aussi dans la démonstration de (Theorem 3.12, [14]).*

Remarque 3.11. *Soit $f : \mathbb{R} \times X \to Y$ une application. La condition i) de la proposition 3.9 implique que l'application*

$$\Phi : X \to AP(Y) \text{ avec } \Phi(x) = f(\cdot, x) \tag{3.2}$$

est bien définie et la condition ii) signifie que la restriction de Φ à tout compact K de X est uniformément continue, ce qui est équivalent à dire que Φ est continue sur X. Ainsi la proposition 3.9 peut aussi s'écrire : $f \in AP_U(\mathbb{R} \times X, Y)$ si et seulement si l'application Φ est bien définie et continue sur X.

Théorème 3.12 (Theorem 3.5, [14]). *Si $f \in AP_U(\mathbb{R} \times X, Y)$, alors l'opérateur de Nemytskii de f défini par* (3.1) *est continu.*

Dans [14], il a été donné trois démonstrations du théorème 3.12. Nous allons donner l'idée de celle qui utilise le lemme de Schwartz.

Lemme 3.13 (Schwartz, Théorème T.2, IX, 5 ; 1, p. 109, [128])). *Considérons E et F deux espaces de Banach et K un compact de E. Si $T : E \to F$ est une application continue, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall x_1 \in X$, $\forall x_2 \in K$,*

$$\|x_1 - x_2\| \leq \delta \implies \|T(x_1) - T(x_2)\| \leq \varepsilon.$$

Le lemme de Schwartz est très utile pour le *calcul des variations* en dimension infinie. La démonstration de ce lemme est très proche de celle du résultat classique de Heine sur la continuité uniforme (une application continue sur un compact est uniformément continue). Revenons à la démonstration du théorème 3.12. Pour montrer la continuité de l'opérateur de Nemytskii $\mathcal{N}_f$ en un point $u \in AP(X)$, on applique le lemme de Schwartz à la restriction de l'application Φ définie par (3.2) à l'ensemble compact $\overline{u(\mathbb{R})}$.

Nous allons donner la réciproque du théorème 3.12 qui montre que la notion de presque-périodicité choisie par Yoshizawa (définition 3.3) est le bon choix.

Théorème 3.14 (Theorem 3.12, [14]). *Soit $f : \mathbb{R} \times X \to Y$ une application. Si l'opérateur de Nemytskii de f défini par* (3.1) *est continu, alors $f \in AP_U(\mathbb{R} \times X, Y)$.*

Pour obtenir ce dernier résultat, nous considérons l'application c qui identifie un élément de X à l'application constante correspondante $c : X \to AP(X)$ avec $c(x)(t) = x$. L'application c est continue, donc l'application $\mathcal{N}_f \circ c : X \to AP(Y)$ est aussi continue. En remarquant que $\mathcal{N}_f \circ c = \Phi$ où Φ est l'application définie par (3.2) et en utilisant la remarque 3.11, nous obtenons le résultat : $f \in AP_U(\mathbb{R} \times X, Y)$.

Maintenant, nous donnons un résultat sur la différentiabilité de l'opérateur de Nemytskii, puis nous appliquons ces résultats de continuité et de différentiabilité.

Théorème 3.15 (Theorem 5.1, [14]). *Soit $f \in AP_U(\mathbb{R} \times X, Y)$. Si pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $f(t, \cdot)$ est de classe C^1 et $D_x f \in AP_U(\mathbb{R} \times X, \mathcal{L}(X, Y))$, alors l'opérateur de Nemytskii de f défini par* (3.1) *est de classe C^1 et*

$$\forall u, \forall h \in AP(X), \qquad D\mathcal{N}_f(u) \cdot h = [t \mapsto D_x f(t, u(t)) \cdot h(t)].$$

Application 1. L'étude précédente sur la continuité des opérateurs de Nemytskii sur les espaces de fonctions p.p. a permis d'améliorer un résultat d'Aulbach et Van Minh (Corollary 2, [42]) sur l'existence d'une solution p.p. d'une équation d'évolution. L'équation considérée est la suivante :

$$x'(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), \tag{3.3}$$

où X est un espace de Banach, $f : \mathbb{R} \times X \to X$ est une application continue et $A : D(A) \subset X \to X$ est un opérateur linéaire non-borné. Nous supposons que l'opérateur A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ fortement continu dans X. La notion de solution utilisée est celle qui correspond à la *formule de variation des constantes* (*mild solution* en anglais).

Définition 3.16. *Nous dirons que*

i) x est une solution de (3.3) *sur* $[t_0, +\infty)$ *($t_0 \in \mathbb{R}$) si $x \in C^0([t_0, +\infty), X)$ et si x vérifie*

$$x(t) = T(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} T(t-\sigma)f(\sigma, x(\sigma))\, d\sigma, \text{ pour } t \geq t_0;$$

ii) x est une solution de (3.3) *sur $\mathbb{R}$, si $x \in C(\mathbb{R}, X)$ et si sa restriction à n'importe quel intervalle $[t_0, +\infty)$ est une solution de de* (3.3)*, ce qui est équivalent à dire que $x \in C(\mathbb{R}, X)$ et vérifie*

$$x(t) = T(t-s)x(s) + \int_{s}^{t} T(t-\sigma)f(\sigma, x(\sigma))\, d\sigma, \text{ pour tous } t \geq s.$$

Formulons les hypothèses suivantes :

(H1) $f \in AP_U(\mathbb{R} \times X, X)$.

(H2) Il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $f - \gamma I$ soit dissipative, c'est-à-dire

$$\forall \lambda > 0,\, \forall x_1,\, x_2 \in X,\, \forall t \geq 0, \quad (1 - \lambda\gamma)\,\|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - x_2 + \lambda\,(f(t, x_1) - f(t, x_2))\|\,.$$

Théorème 3.17 (Theorem 4.1, [14])**.** *Supposons que les hypothèses* **(H1)** *et* **(H2)** *soient vérifiées. Si le semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est de type ω : ($\omega \in \mathbb{R}$ et $\|T(t)\| \leq \mathrm{e}^{\omega t}$ pour $t \geq 0$) et si $\omega + \gamma < 0$, alors l'équation* (3.3) *admet une unique solution p.p..*

Remarque 3.18. *En utilisant une hypothèse supplémentaire, ce résultat a été démontré par Aulbach et Van Minh (Corollary 2,* [42]*). Avec nos notations, cette hypothèse est la suivante :*

(H2-bis) *Pour tout $x \in AP(X)$, l'application $t \mapsto f(t, x(t))$ est aussi dans $AP(X)$; et l'opérateur de Nemytskii $\mathcal{N}_f$ de f est continue sur $AP(X)$.*

Cette hypothèse n'est plus utile, puisque d'après nos résultats sur les opérateurs de Nemytskii, **(H2-bis)** *est vérifiée dès que $f \in AP_U(\mathbb{R} \times X, X)$.*

Pour montrer de quelle manière interviennent nos résultats sur les opérateurs de Nemytskii dans la démonstration de Aulbach et Van Minh, nous en donnant le plan. Les auteurs construisent un semi-groupe $(\mathcal{T}^h)_{h\geq 0}$ fortement continu d'opérateurs (non linéaires) dans l'espace de Banach $AP(X)$. Pour cela, ils considèrent le semi-groupe $(\mathcal{S}^h)_{h\geq 0}$ fortement continu d'opérateurs linéaires dans $AP(X)$ définis par

$$\mathcal{S}^h u(t) = T(h)u(t-h), \qquad \text{pour } h \geq 0, u \in AP(X), t \in \mathbb{R},$$

où $(T(t))_{t\geq 0}$ désigne le semi-groupe engendré par l'opérateur linéaire A. Pour définir le semi-groupe $(\mathcal{T}^h)_{h\geq 0}$, les auteurs utilisent la théorie des semi-groupes de contractions (non linéaires) associés à une équation dissipative autonome. Pour chaque $u \in AP(X)$, le problème de Cauchy autonome dans $AP(X)$ considéré est

$$\left\{ \begin{array}{ll} v'(h) = \mathcal{A}v(h) + \mathcal{N}_f(v(h)) & \text{pour } h \geq 0, \\ v(0) = u \end{array} \right. \tag{3.4}$$

où $\mathcal{N}_f$ désigne l'opérateur de Nemytskii de f et $\mathcal{A}$ le générateur infinitésimal de semi-groupe $(\mathcal{S}^h)_{h\geq 0}$. L'opérateur $(\mathcal{T}^h)_{h\geq 0}$ est défini par $\mathcal{T}^h u = v(h)$, où v est la solution du problème de Cauchy (3.4) au sens suivant : $v \in C^0([0,+\infty), AP(X))$ et si v vérifie

$$v(h) = \mathcal{S}^h u + \int_0^h \mathcal{S}^{(h-\sigma)} \mathcal{N}_f(v(\sigma))\, d\sigma, \text{ pour } h \geq 0.$$

Avec ces notations, le problème de l'existence d'une solution p.p. se ramène à l'étude de l'existence d'un point fixe commun d'une famille d'opérateurs, puisque u est une solution p.p. de (3.3) si et seulement si $u \in AP(X)$ et $\mathcal{T}^h u = u$ pour tout $h \geq 0$. La continuité du Nemytskii de f intervient essentiellement pour montrer que la famille d'opérateurs $(\mathcal{T}^h)_{h\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu dans $AP(X)$.

Application 2. Nous appliquons les propriétés de continuité et de différentiabilité des opérateurs de Nemytskii sur l'équation d'évolution suivante :

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t), u(t)), \tag{3.5}$$

où X et U sont deux espaces de Banach, $u : \mathbb{R} \to U$ est une application p.p. donnée, $f : \mathbb{R} \times X \times U \to X$ est une application continue et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$A(t) : D(A(t)) \subset X \to X$$

est un opérateur linéaire non-borné. Nous formulons des hypothèses sur l'équation (3.5) pour qu'elle admette une et une seule solution $\underline{x}(u) \in AP(X)$, pour tout $u \in AP(U)$. Dans ce cas nous étudions la continuité et la différentiabilité de l'application $u \mapsto \underline{x}(u)$ sur $AP(U)$. Pour simplifier l'exposé, dans un premier temps, nous considérons le cas où l'opérateur linéaire $A(t)$ est indépendant du temps. L'équation (3.5) devient

$$x'(t) = Ax(t) + f(t, x(t), u(t)), \tag{3.6}$$

où $A : D(A) \subset X \to X$ est un opérateur linéaire non-borné. Nous supposons que l'opérateur A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ fortement continu dans X.

La notion de solution utilisée est l'analogue de celle de la définition 3.16, nous dirons que x est une solution de (3.6) sur $[t_0, +\infty)$ ($t_0 \in \mathbb{R}$) si $x \in C^0([t_0, +\infty), X)$ et si x vérifie

$$x(t) = T(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t T(t - \sigma) f(\sigma, x(\sigma), u(\sigma))\, d\sigma, \text{ pour } t \geq t_0;$$

et x est une solution de (3.6) sur $\mathbb{R}$, si $x \in C(\mathbb{R}, X)$ et si sa restriction à n'importe quel intervalle $[t_0, +\infty)$ est une solution de (3.6).

Sous l'hypothèse suivante, nous utilisons un résultat d'existence et d'unicité de la solution p.p. de l'équation linéaire associée à (3.6).

(H3) Le semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est exponentiellement stable, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes M et $\omega > 0$ telles que $\|T(t)\| \leq M \exp(-\omega t)$, pour tout $t \geq 0$.

Lemme 3.19 (Lemma 3.3, [21])). *Si l'hypothèse* **(H3)** *est vérifiée, alors pour tout $e \in AP(X)$, l'équation linéaire*

$$x'(t) = Ax(t) + e(t) \tag{3.7}$$

admet une unique solution $x_e \in AP(X)$. De plus cette solution vérifie

$$\|x_e\|_\infty \leq \frac{M}{\omega} \|e\|_\infty .$$

Ce lemme permet de définir l'application

$$L : AP(X) \to AP(X) \text{ avec } Le = x_e \tag{3.8}$$

où x_e est l'unique solution p.p. de l'équation linéaire (3.7). L'application L est linéaire et vérifie $\|L\| \leq \dfrac{M}{\omega} \|e\|_\infty$.

Pour revenir à l'équation (3.6), nous formulons les hypothèses suivantes :

(H4) $f \in AP_U(\mathbb{R} \times (X \times U), X)$.

(H5) Il existe $c \in \left(0, \dfrac{\omega}{M}\right)$ tel que

$$\forall x_1,\, x_2 \in X,\, \forall u \in U,\, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \|f(t, x_1, u) - f(t, x_2, u)\| \leq c \|x_1 - x_2\|.$$

Pour obtenir un résultat de continuité de l'application $u \mapsto \underline{x}(u)$ sur $AP(U)$, où $\underline{x}(u) \in AP(X)$ désigne la solution l'équation (3.6), nous avons utilisé un théorème de point fixe de contraction dépendant d'un paramètre.

Théorème 3.20 (Théorème T.2, XII, 1 ; 2, p. 143, [128]))**.** *Considérons E un espace de Banach, F un espace topologique et $T : E \times F \to E$ une application. Si l'application partielle $f \mapsto T(e, f)$ est continue sur F, pour tout $e \in E$, et s'il existe $k \in (0, 1)$ tel que*

$$\forall e_1 \in E, \quad \forall e_2 \in E, \quad \forall f \in F, \qquad \|T(e_1, f) - T(e_2, f)\| \leq k \|e_1 - e_2\|,$$

alors pour tout $f \in F$, il existe une unique solution $\underline{e}(f)$ de

$$e \in E \text{ et } T(e, f) = e.$$

De plus l'application $f \mapsto \underline{e}(f)$ est continue.

En appliquant ce théorème à l'application

$$\Psi : AP(X) \times AP(U) \equiv AP(X \times U) \to AP(X) \text{ avec } \Psi(x, u) = (L \circ \mathcal{N}_f)(x, u), \tag{3.9}$$

où L est l'application linéaire définie par (3.8) et $\mathcal{N}_f$ l'opérateur de Nemytskii associé à l'application $(t, (x, u)) \to f(t, x, u)$, nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 3.21 (Theorem 4.4, [21])**.** *Supposons que les hypothèses* **(H3)-(H5)** *soient vérifiées. Alors pour tout $u \in AP(U)$, l'équation* (3.6) *admet une unique solution $\underline{x}(u) \in AP(X)$. De plus l'application $u \mapsto \underline{x}(u)$ est continue sur $AP(U)$.*

Remarquons que dans ce dernier résultat, l'application partielle $u \to f(t, x, u)$, n'est pas supposée lipschitzienne, mais seulement continue, c'est le résultat sur la continuité de l'opérateur de Nemytskii (théorème 3.12) qui permet de conclure. Pour obtenir un résultat de différentiabilité, nous utilisons le théorème des fonctions implicites appliqué à la fonction définie par (3.9).

(H6) $f \in AP_U(\mathbb{R} \times (X \times U), X)$, l'application partielle $(x, u) \mapsto f(t, x, u)$ est différentiable, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $D_2 f \in AP_U(\mathbb{R} \times (X \times U), \mathcal{L}(X, X))$ et $D_3 f \in AP_U(\mathbb{R} \times (X \times U), \mathcal{L}(U, X))$.

Théorème 3.22 (Theorem 5.4, [21])**.** *Supposons que l'hypothèse* **(H6)** *soit vérifiée. Soit $u_0 \in AP(U)$. Supposons que pour $u = u_0$, l'équation* (3.6) *admette une solution $x_0 \in AP(X)$ vérifiant*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|D_2 f(t, x_0(t), u_0(t))\| < \frac{\omega}{M}.$$

Alors il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de u_0 dans $AP(U)$, un voisinage ouvert $\mathcal{X}$ de x_0 dans $AP(X)$ et une application de classe C^1 $u \mapsto \underline{x}(u)$ de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{X}$ tels que, pour tout $u \in \mathcal{U}$, $\underline{x}(u)$ est une solution p.p. de (3.6)*. De plus $\underline{x}(u)$ est l'unique solution de* (3.6) *dans $\mathcal{X}$ et en particulier, nous avons $\underline{x}(u_0) = x_0$.*

Pour revenir à l'équation générale (3.5), nous supposons que la famille d'opérateurs $(A(t))_t$ satisfait les conditions dites d'*Acquistapace-Terrini* (cf. [31]) : il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, K, $L \geq 0$ et μ, $\nu \in (0,1]$ avec $\mu + \nu > 1$ tels que pour tous t, $s \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathcal{S}_\theta := \{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, |\arg \lambda \leq \theta|\}$,

$$\mathcal{S}_\theta \cup \{0\} \subset \rho(A(t) - \lambda_0), \qquad \|R(\lambda; A(t) - \lambda_0\| \leq \frac{K}{1 + |\lambda|}$$

et

$$\|(A(t) - \lambda_0)R(\lambda; A(t) - \lambda_0)[R(\lambda_0; A(t)) - R(\lambda_0; A(s))]\| \leq L \frac{|t-s|^\mu}{|\lambda|^\nu}$$

($\rho(A(t))$ désigne la résolvante de $A(t)$ et $R(A(t); \lambda) = (\lambda I - A(t))^{-1}$ pour $\lambda \in \rho(A(t))$. Sous les conditions d'Acquistapace-Terrini, la famille d'opérateurs $(A(t))_t$ engendre une famille d'évolution $(E(t,s))_{t \geq s}$ dans $\mathcal{L}(X)$, c'est-à-dire : $E(t,s)E(s,r) = E(t,r)$, pour $t \geq s \geq r$, $E(t,t) = I$, pour $t \in \mathbb{R}$ et l'application $(t,s) \mapsto E(t,s) \in \mathcal{L}(X)$ est continue sur $t > s$. Cette famille d'évolution $(E(t,s))_{t \geq s}$ satisfait, pour tout $s \in \mathbb{R}$ et pour tout $x_0 \in \overline{D(A(s))}$, la fonction $t \mapsto E(t,s)x_0$ est continue en $t = s$ et c'est l'unique solution dans $C([s, +\infty), X) \cap C^1((s, +\infty), X)$ du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t), & \text{pour } t \geq s, \\ x(s) = x_0. \end{cases}$$

Ce qui précède permet de donner une notion de solution analogue au cas où $A(t)$ est indépendant de t, pour l'équation (3.5). Nous dirons que x est une solution de (3.5) sur $[t_0, +\infty)$ ($t_0 \in \mathbb{R}$) si $x \in C^0([t_0, +\infty), X)$ et si x vérifie

$$x(t) = E(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t E(t, \sigma) f(\sigma, x(\sigma), u(\sigma))\, d\sigma, \ \text{pour } t \geq t_0;$$

et x est une solution de (3.5) sur $\mathbb{R}$, si $x \in C(\mathbb{R}, X)$ et si sa restriction à n'importe quel intervalle $[t_0, +\infty)$ est une solution de (3.5).

D'une manière analogue aux théorèmes 3.21 et 3.22, nous obtenons les résultats suivants de continuité et de différentiabilité de la solution par rapport au paramètre u pour l'équation (3.5). Pour cela, nous utilisons les hypothèses suivantes :

(H7) $(A(t))_t$ satisfait les conditions d'Acquistapace-Terrini et l'application $t \mapsto R(\lambda_0, A(t))$ est p.p..

(H8) La famille d'évolution $(E(t,s))_{t \geq s}$ est exponentiellement stable, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes M et $\omega > 0$ telles que $\|E(t,s)\| \leq M \exp(-\omega(t-s))$, pour tous $t \geq s$.

Théorème 3.23 (Theorem 4.2, [21])**.** *Supposons que les hypothèses* **(H4)**, **(H5)**, **(H7)** *et* **(H8)** *soient vérifiées. Alors pour tout $u \in AP(U)$, l'équation* (3.5) *admet une unique solution $\underline{x}(u) \in AP(X)$. De plus l'application $u \mapsto \underline{x}(u)$ est continue sur $AP(U)$.*

Théorème 3.24 (Theorem 5.1, [21])**.** *Supposons que les hypothèses* **(H6)** *et* **(H7)** *soient vérifiées. Soit $u_0 \in AP(U)$. Supposons que pour $u = u_0$, l'équation* (3.5) *admette une solution $x_0 \in AP(X)$ vérifiant*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|D_2 f(t, x_0(t), u_0(t))\| < \frac{\omega}{M}.$$

Alors il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de u_0 dans $AP(U)$, un voisinage ouvert $\mathcal{X}$ de x_0 dans $AP(X)$ et une application de classe C^1 $u \mapsto \underline{x}(u)$ de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{X}$ tels que, pour tout $u \in \mathcal{U}$, $\underline{x}(u)$ est une solution p.p. de (3.5)*. De plus $\underline{x}(u)$ est l'unique solution de* (3.5) *dans $\mathcal{X}$ et en particulier, nous avons $\underline{x}(u_0) = x_0$.*

Remarque 3.25. *Dans le cas où l'opérateur $A(t)$ est indépendant de t, la condition d'Acquistapace-Terrini implique que le semi-groupe engendré par l'opérateur A est analytique, par conséquent le théorème 3.21 (resp. 3.22) n'est pas une conséquence du théorème 3.23 (resp. 3.24).*

4. Fonctions presque-automorphes

La notion de presque-automorphie est une généralisation de celle de la presque-périodicité. Les fonctions presque-automorphes ont été introduites en 1962 par Bochner [54]. Pour un exposé complet de ces fonctions, nous renvoyons aux livres de N'Guérékata [109, 110], qui traitent aussi de l'étude des solutions p.p. d'équations d'évolution.

Définition 4.1. *Une application continue $u : \mathbb{R} \to X$ est dite presque-automorphe (p.a.) si pour toute suite numérique $(t'_n)_n$, il existe une application $v : \mathbb{R} \to X$ et une sous-suite de $(t'_n)_n$, notée $(t_n)_n$ vérifiant pour tout $t \in \mathbb{R}$:*

$$\lim_{n\to\infty} u(t + t_n) = v(t) \text{ et } \lim_{n\to\infty} v(t - t_n) = u(t).$$

L'ensemble des fonctions p.a. à valeurs dans X est noté $AA(X)$.

Remarque 4.2. *i) L'ensemble des valeurs d'une fonction p.a. est relativement compact, donc cette fonction est bornée.*

ii) La fonction v de la définition 4.1 n'est pas en général continue, mais seulement bornée ($v \in L^\infty(\mathbb{R}, X)$).

Dans la littérature, plusieurs définitions de la presque-automorphie en t uniformément par rapport à $x \in X$ ont été données. Évidemment la définition choisie doit permettre d'obtenir un résultat de composition de fonctions p.a., c'est-à-dire l'analogue du théorème 3.5, p. 13. Commençons par énoncer le dernier résultat connu avant cette étude sur la composition de fonctions p.a..

Théorème 4.3 (Liang et al., [104])**.** *Soit $f : \mathbb{R} \times X \to Y$ une application vérifiant :*

i) $\forall x \in X$, $f(\cdot, x) \in AA(Y)$,

ii) pour tout **borné** *B de X, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x_1$, $x_2 \in B$,*

$$\|x_1 - x_2\| \le \delta \implies \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \le \varepsilon.$$

Si $u \in AA(X)$, alors $[t \mapsto f(t, u(t))] \in AA(Y)$.

De la même manière que pour le cas presque-périodique (théorème 3.14, p. 15), nous établissons la condition nécessaire suivante pour que l'opérateur de Nemytskii associé à l'application f soit continu.

Lemme 4.4 (Theorem 9.6, [14])**.** *Soit $f : \mathbb{R} \times X \to Y$ une application. Si l'opérateur de Nemytskii de f défini par*

$$\mathcal{N}_f : AA(X) \to AA(Y) \text{ avec } \mathcal{N}_f(u) = f(\cdot, u(\cdot)) \tag{4.1}$$

est continu, alors f vérifie i) et ii) du théorème 4.3 en remplaçant le mot borné par compact dans ii).

Pour cette raison, nous avons choisi la définition suivante.

Définition 4.5 ([14])**.** *Une application $f : \mathbb{R} \times X \to Y$ est dite p.a. en t uniformément par rapport à $x \in X$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*
i) $\forall x \in X$, $f(\cdot, x) \in AA(Y)$,
ii) pour tout **compact** *K de X, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x_1$, $x_2 \in K$,*

$$\|x_1 - x_2\| \leq \delta \implies \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq \varepsilon.$$

L'ensemble des fonctions p.a. en t uniformément par rapport à $x \in X$ est noté $AA_U(\mathbb{R} \times X, Y)$.

Remarque 4.6. *Soit $f : \mathbb{R} \times X \to Y$ une application. La définition 4.5 peut aussi s'écrire : $f \in AA_U(\mathbb{R} \times X, Y)$ si et seulement si l'application*

$$\Phi : X \to AA(Y) \text{ avec } \Phi(x) = f(\cdot, x) \tag{4.2}$$

est bien définie et continue sur X.

Avec la définition d'une fonction p.a. dépendant d'un paramètre que nous avons choisie (cf. définition 4.5), nous avons pu obtenir un résultat de composition grâce au théorème d'approximation de Schauder.

Théorème 4.7 (Schauder, p. 90, [62]))**.** *Soit E un espace topologique et F un espace de Banach. Soit $T : E \to F$ une application continue telle que $T(E)$ soit relativement compact. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $c_j \in C(E, \mathbb{R})$ et $f_j \in F$ ($j = 1, \cdots, N_\varepsilon$) tels que*

$$\forall e \in E, \qquad \left\| T(e) - \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} c_j(e) f_j \right\| \leq \varepsilon.$$

En appliquant ce théorème à la restriction de l'application Φ définie par (4.2) sur un compact K de X, on obtient la caractérisation suivante des fonctions p.a. en t uniformément par rapport à $x \in X$.

Corollaire 4.8 (Lemma 9.1, [14]))**.** *Soit $f \in AA_U(\mathbb{R} \times X, Y)$ et K un compact de X. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $c_j \in C(K, \mathbb{R})$ et $a_j \in AA(Y)$ ($j = 1, \cdots, N_\varepsilon$) tels que*

$$\forall x \in K, \qquad \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| f(t, x) - \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} c_j(x) a_j(t) \right\|_Y \leq \varepsilon.$$

Ce dernier corollaire permet de démontrer des propriétés sur les fonctions p.a. en t uniformément par rapport à $x \in X$, en se ramenant au cas particulier où $f(t, x) = c(x)a(t)$ avec $c \in C(K, \mathbb{R})$ et $a \in AA(Y)$, dès que ces dernières propriétés sont stables pour la somme et la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. Par exemple, il est évident que $[t \mapsto c(u(t))a(t)] \in AA(Y)$ pour $u \in AA(X)$ avec $\overline{u(\mathbb{R})} \subset K$. Ce dernier corollaire permet établir le résultat de composition suivant :

Théorème 4.9 (Lemma 9.4, [14]). *Si* $u \in AA(X)$ *et* $f \in AA_U(\mathbb{R} \times X, Y)$*, alors* $[t \mapsto f(t, u(t))] \in AA(Y)$.

Ainsi pour $f \in AA_U(\mathbb{R} \times X, Y)$, l'opérateur de Nemytskii (4.1) est bien défini. Les espaces $AA(X)$ et $AA(Y)$ sont munis de la norme de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$; ainsi ce sont des espaces de Banach.

Théorème 4.10 (Theorem 9.6, [14]). *Soit* $f : \mathbb{R} \times X \to Y$*. Alors* $f \in AA_U(\mathbb{R} \times X, Y)$ *si et seulement si l'opérateur de Nemytskii de* f *défini par* (4.1) *est continu.*

La démonstration de l'implication directe du théorème 4.10 est analogue au cas presque-périodique (cf. le théorème 3.12, p. 15) en utilisant le lemme de Schwartz (cf. le lemme 3.13, p. 15) à l'application Φ définie par (4.2). L'implication réciproque n'est rien d'autre que le lemme 4.4 et montre que la définition que nous avons choisie pour la presque-automorphie en t uniformément par rapport à $x \in X$ (définition 4.5) est la bonne notion.

En utilisant le théorème d'approximation de Schauder (cf. le théorème 4.7), nous obtenons aussi la caractérisation suivante d'une fonction p.a. en t uniformément par rapport à $x \in X$

Théorème 4.11 (Theorem 3.14, [20]). *Soit* $f : \mathbb{R} \times X \to Y$ *une application.* $f \in AA_U(\mathbb{R} \times X, Y)$ *si et seulement pour tout compact* K *de* X *et pour toute suite numérique* $(t'_n)_n$*, il existe une application* $g : \mathbb{R} \times X \to X$ *et une sous-suite de* $(t'_n)_n$*, notée* $(t_n)_n$ *vérifiant pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K} \|f(t+t_n, x) - g(t, x)\| = 0 \ \textit{et} \ \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K} \|g(t-t_n, x) - f(t, x)\| = 0.$$

Maintenant, nous donnons un résultat sur la différentiabilité de l'opérateur de Nemytskii, puis nous appliquons ces résultats de continuité et de différentiabilité.

Théorème 4.12 (Theorem 9.7, [14]). *Soit* $f \in AA_U(\mathbb{R} \times X, Y)$*. Si pour tout* $t \in \mathbb{R}$*,* $f(\cdot, x)$ *est de classe* C^1 *et* $D_x f \in AA_U(\mathbb{R} \times X, \mathcal{L}(X, Y))$*, alors l'opérateur de Nemytskii de* f *défini par* (4.2) *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *et*

$$\forall u, \forall h \in AA(X), \qquad D\mathcal{N}_f(u) \cdot h = [t \mapsto D_x f(t, u(t)) \cdot h(t)].$$

Application. Dans [21], les propriétés de continuité et de différentiabilité des opérateurs de Nemytskii sont appliquées à l'équation d'évolution suivante :

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t), u(t)), \tag{4.3}$$

où X et U sont deux espaces de Banach, $u : \mathbb{R} \to U$ est une application p.a. donnée, $f : \mathbb{R} \times X \times U \to X$ est une application continue et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$A(t) : D(A(t)) \subset X \to X$$

est un opérateur linéaire non-borné. Nous formulons des hypothèses sur l'équation (4.3) pour qu'elle admette une et une seule solution $\underline{x}(u) \in AA(X)$, pour tout $u \in AA(U)$. Dans ce cas nous étudions la continuité et la différentiabilité de l'application $u \mapsto \underline{x}(u)$ sur $AA(U)$ (Theorem 4.2, Theorem 5.1, [21]). Les résultats obtenus sont analogues aux cas p.p. (cf. les théorèmes 3.23 et 3.24, p. 19), où les conditions d'*Acquistapace-Terrini* sont remplacées par celle dites de *Ding-Long-N'Guérékata* introduites par les auteurs de [76].

5. Fonctions pseudo presque-périodiques et pseudo presque-automorphes

L'article [20] est une étude sur les propriétés des opérateurs de Nemytskii sur les espaces des fonctions pseudo presque-périodiques et sur les espaces de fonctions pseudo presque-automorphes. Dans ce paragraphe, nous présentons les résultats de [20] portant uniquement sur les espaces de fonctions pseudo presque-périodiques. Une première généralisation des fonctions presque-périodiques sont les fonctions *asymptotiquement presque-périodiques* dues à Fréchet en 1941 [85, 86]. Une fonction continue $u : (t_0, +\infty) \to X$ est *asymptotiquement presque-périodique* si elle peut s'écrire sous la forme $u = u_1 + u_2$ où u_1 est presque-périodique et u_2 vérifie : $\lim_{t\to+\infty} u_2(t) = 0$. Une seconde généralisation des fonctions presque-périodiques sont les fonctions *pseudo presque-périodiques* dues à Zhang en 1994 [142]-[144]. Contrairement aux cas presque-périodique, asymptotiquement presque-périodique et presque-automorphe, l'ensemble image d'une fonction pseudo presque-périodique n'est pas en général relativement compact, ce qui entraîne de nouvelles difficultés. La définition suivante est due à Zhang (Definition 5.1, p. 57 [144]).

Définition 5.1. *Une application $u : \mathbb{R} \to X$ est dite pseudo presque-périodique (pseudo p.p.) si*

$$u = u_1 + u_2, \tag{5.1}$$

où $u_1 : \mathbb{R} \to X$ est p.p. (cf. définition 3.1, p. 13) et u_2 est ergodique, c'est-à-dire $u_2 : \mathbb{R} \to X$ est continue, bornée et vérifie

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} \|u_2(t)\|\, dt = 0.$$

L'ensemble des fonctions pseudo p.p. à valeurs dans X est noté $PAP(X)$.

Remarque 5.2. *i) La décomposition donnée dans* (5.1) *est unique, la fonction u_1 est appelée la composante p.p. et u_2 la perturbation ergodique de u.*

ii) L'ensemble des valeurs d'une fonction pseudo p.p. n'est pas en général relativement compact, mais seulement borné.

Rappelons aussi l'équivalence entre une fonction ergodique u et l'ergodicité des l'ensembles suivants : $\{t \in [-r, r]\,;\, \|u(t)\| > \varepsilon\}$, pour $\varepsilon > 0$.

Lemme 5.3 (Zhang, [143])**.** *Une application $u : \mathbb{R} \to X$ continue et bornée est ergodique si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2r} \text{mes}\,\{t \in [-r, r]\,;\, \|u(t)\| > \varepsilon\} = 0.$$

Nous avons choisi une définition des fonctions pseudo p.p. en t uniformément par rapport à $x \in X$ qui soit compatible avec la définition classique de Yoshizawa des fonctions p.p. en t uniformément par rapport à $x \in X$ (cf. la proposition 3.9, p. 14).

Définition 5.4 (Definition 2.12, [20])**.** *Une application $f : \mathbb{R}\times X \to Y$ est dite pseudo p.p. en t uniformément par rapport à $x \in X$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

i) $\forall x \in X$, $f(\cdot, x) \in PAP(Y)$,

ii) pour tout compact K de X, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x_1,\, x_2 \in K$,

$$\|x_1 - x_2\| \le \delta \implies \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \le \varepsilon.$$

L'ensemble des fonctions pseudo p.p. en t uniformément par rapport à $x \in X$ est noté $PAP_U(\mathbb{R} \times X, Y)$.

Remarque 5.5. *Soit $f : \mathbb{R}\times X \to Y$ une application. La définition 5.4 peut aussi s'écrire : $f \in PAP_U(\mathbb{R} \times X, Y)$ si et seulement si l'application*

$$\Phi : X \to PAP(Y) \text{ avec } \Phi(x) = f(\cdot, x) \tag{5.2}$$

est bien définie et continue sur X.

De la proposition 3.9, p. 14, nous obtenons la caractérisation suivante d'une fonction pseudo p.p. en t uniformément par rapport à $x \in X$.

Proposition 5.6 (Proposition 2.15, [20]). *$f \in PAP_U(\mathbb{R} \times X, Y)$ si et seulement si*

$$f = f_1 + f_2,$$

où $f_1 \in AP_U(\mathbb{R} \times X, Y)$ (cf. définition 3.3, p. 13) et $f_2 \in C(\mathbb{R} \times X, Y)$ vérifie
i) $\forall x \in X,\ f_2(\cdot, x)$ est ergodique,
ii) pour tout compact K de X, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \forall x_1,\ x_2 \in K$,

$$\|x_1 - x_2\| \leq \delta \implies \|f_2(t, x_1) - f_2(t, x_2)\| \leq \varepsilon.$$

En utilisant le lemme de Schwartz (lemme 3.13, p. 15) et le résultat sur l'équivalence entre une fonction ergodique et l'ergodicité d'ensembles (lemme 5.3), nous obtenons le résultat suivant de composition.

Théorème 5.7 (Theorem 2.17, [20]). *Supposons que l'hypothèse*

(H) *pour tout borné B de X, f est bornée sur $\mathbb{R} \times B$*

soit vérifiée. Si $u \in PAP(X)$ et $f \in PAP_U(\mathbb{R}\times X, Y)$, alors $[t \mapsto f(t, u(t))] \in PAP(Y)$.

Remarque 5.8. *Ce théorème est une amélioration du résultat de Li et al.,* [96]*, où les auteurs supposent en plus de nos hypothèses que l'application f vérifie la propriété de ii) de la définition 5.4 en remplaçant le mot compact par borné.*

Nous donnons ici le plan de la démonstration du théorème 5.7. Pour cela, nous considérons la décomposition suivante

$$f(t, u(t)) = f_1(t, u_1(t)) + \{f(t, u(t)) - f(t, u_1(t))\} + f_2(t, u_1(t)),$$

où u_1 (resp. f_1) désigne la composante p.p. et u_2 (resp. f_2) la perturbation ergodique de la fonction u (resp. f). La fonction $t \mapsto f_1(t, u_1(t))$ est p.p. d'après le résultat de composition (théorème 3.5, p. 13). L'ergodicité de la fonction $t \mapsto f_2(t, u_1(t))$ provient de la relative compacité de l'ensemble $u_1(\mathbb{R})$ et des propriétés i) et ii) de la proposition 5.6.

Pour démontrer l'ergodicité de la fonction $t \mapsto f(t, u(t)) - f(t, u_1(t))$, nous avons utilisé le lemme de Schwartz (lemme 3.13, p. 15) et le lemme de Zhang (lemme 5.3). Le lemme de Schwartz appliqué à Φ définie par (5.2) sur le compact $\overline{u_1(\mathbb{R})}$, permet d'obtenir l'inclusion suivante

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \{t \in [-r, r]\,;\ \|f(t, u(t)) - f(t, u_1(t))\| > \varepsilon\} \subset \{t \in [-r, r]\,;\ \|u_2(t)\| > \delta\}.$$

La conclusion résulte du lemme de Zhang.

Si $f \in PAP_U(\mathbb{R}\times X, Y)$ et si l'hypothèse **(H)** est vérifiée, alors l'opérateur de Nemytskii

$$\mathcal{N}_f : PAP(X) \to PAP(Y) \text{ avec } \mathcal{N}_f(u) = f(\cdot, u(\cdot)) \tag{5.3}$$

est bien défini. Les espaces $PAP(X)$ et $PAP(Y)$ sont munis de la norme de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$; ainsi ce sont des espaces de Banach.

Pour démontrer la continuité des opérateurs de Nemytskii entre les espaces de fonctions presque-périodiques, asymptotiquement presque-périodiques et presque-automorphes, l'argument essentiel utilisé est le fait que les ensembles images de ces fonctions sont relativement compacts, ce qui n'est plus le cas pour les fonctions pseudo presque-périodiques. Pour cette raison, nous sommes amenés à faire une hypothèse de compacité sur l'ensemble image de la fonction autour de laquelle nous étudions la continuité.

Théorème 5.9 (Theorem 4.1, [20])**.** *Soit $f \in PAP_U(\mathbb{R}\times X, Y)$. Supposons que l'hypothèse* **(H)** *est vérifiée. Si $u \in PAP(X)$ tel que $u(\mathbb{R})$ soit relativement compact, alors l'opérateur de Nemytskii de f défini par* (5.3) *est continu au point u.*

La démonstration du théorème 5.9 est analogue au cas presque-périodique (cf. le théorème 3.12, p. 15) en utilisant le lemme de Schwartz à l'application Φ définie par (5.2).

Application. Ce dernier résultat sur la continuité des opérateurs de Nemytskii permet d'utiliser un théorème de point fixe de Schauder pour d'obtenir un résultat d'existence d'une solution pseudo p.p. de l'équation de la chaleur suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = \varepsilon(t) g\left(u(t,x)\right) + h\left(t,x\right), \text{ si } t \geq t_0 \text{ et } x \in \Omega, \\ \\ u(t,x) = 0, \text{ si } t \geq t_0 \text{ et } x \in \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{5.4}$$

où Δ désigne l'opérateur de Laplace et Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ dont la frontière est de classe C^2. Les applications ε, g et h vérifient les hypothèses suivantes :

(H1) L'application $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et vérifie $\lim\limits_{|t|\to+\infty} \varepsilon(t) = 0$.

(H2) L'application $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est continue et il existe a et $b \geq 0$ tels que pour tout $r \in \mathbb{R}$, $|g(r)| \leq a\,|r| + b$.

(H3) L'application ε vérifie $a \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |\varepsilon(t)| < \lambda_1$, où a la constante définie dans l'hypothèse (H2) et $\lambda_1 > 0$ désigne la plus petite valeur propre de $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$.

(H4) L'application $h : \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est continue et $[t \mapsto h(t,\cdot)] \in PAP(L^2(\Omega))$.

Pour cette équation de la chaleur, nous utilisons la théorie L^2, c'est-à-dire l'espace de Hilbert $X = L^2(\Omega)$ muni de son produit scalaire usuel où l'opérateur linéaire $A : X \to X$ est défini par $D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ et $Au = \Delta u$. L'opérateur A engendre un semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ fortement continu dans X qui est compact et exponentiellement stable :

$$\forall t \geq 0, \qquad \|T(t)\| \leq \exp(-\lambda_1 t).$$

Considérons l'application $f : \mathbb{R} \times X \to X$ définie par

$$f(t,u)(x) = \varepsilon(t) g(u(x)) + h(t,x) \text{ pour } t \in \mathbb{R}, u \in X \text{ et } x \in \Omega.$$

Avec ces notations, l'équation de la chaleur (5.4) s'écrit sous la forme

$$u'(t) = Au(t) + f(t,u(t)). \tag{5.5}$$

La notion de solution utilisée est celle de la définition 3.16, p.16. Avec les hypothèses faites sur l'équation de la chaleur (5.4), $f \in PAP_U(\mathbb{R} \times X, X)$ et f vérifie l'hypothèse **(H)** du théorème 5.7 ; ainsi l'opérateur de Nemytskii $\mathcal{N}_f : PAP(X) \to PAP(X)$, avec $\mathcal{N}_f(u) = f(\cdot, u(\cdot))$, est bien défini.

Pour tout $b \in PAP(X)$, u est une solution pseudo p.p. de l'équation linéaire associée à l'équation (5.5) :

$$u'(t) = Au(t) + b(t) \tag{5.6}$$

si et seulement si $u \in PAP(X)$ et $u(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} T(t-s)b(s)\,ds$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, puisque le semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est exponentiellement stable et qu'une fonction pseudo p.p. est bornée sur $\mathbb{R}$. Cette caractérisation de la solution pseudo p.p. de l'équation linéaire (5.6) nous permet de définir l'opérateur linéaire continu suivant $L : PAP(X) \to PAP(X)$ avec

$$Lb(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s)b(s)\,ds, \text{ pour } b \in PAP(X) \text{ et } t \in \mathbb{R}.$$

Pour obtenir un résultat d'existence d'une solution pseudo p.p. de l'équation (5.5), nous utilisons le théorème de point fixe de Schauder sur l'opérateur $\Gamma : PAP(X) \to PAP(X)$ défini par $\Gamma = L \circ \mathcal{N}_f$, où $PAP(X)$ est muni de la norme de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. Pour cela il faut déterminer un sous-ensemble C convexe et fermé de $PAP(X)$ tel que l'opérateur $\Gamma : C \to C$ soit continu avec $\Gamma(C)$ relativement compact.

Le résultat d'existence d'une solution pseudo p.p. est le suivant.

Théorème 5.10 (Corollary 5.7, [20]). *Si les hypothèses* **(H1)-(H4)** *sont vérifiées, alors l'équation* (5.4) *admet au moins une solution pseudo p.p..*

Ici, nous donnons le plan pour construire un sous-ensemble C convexe et fermé de $PAP(X)$ tel que l'opérateur $\Gamma : C \to C$ soit continu avec $\Gamma(C)$ est relativement compact, pour pouvoir appliquer le théorème de point fixe de Schauder. Notons $B_\infty(R) = \{u \in PAP(X)\,;\, \|u\|_\infty \leq R\}$ avec $R > 0$. Une étude de l'opérateur Γ permet d'affirmer que $\Gamma : B_\infty(R) \to B_\infty(R)$ pour $R > 0$ suffisamment grand, que l'ensemble $\{\Gamma b\,;\, b \in B_\infty(R)\}$ est uniformément équicontinu sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe un compact K de X tel que $\{\Gamma b(t)\,;\, b \in B_\infty(R), t \in \mathbb{R}\} \subset K$. Ces dernières propriétés sur l'opérateur Γ permettent de construire un sous-ensemble C convexe et fermé de $PAP(X)$ vérifiant

i) $\Gamma : C \to C$,

ii) l'ensemble $\{\Gamma b\,;\, b \in C\}$ est uniformément équicontinu sur $\mathbb{R}$,

iii) il existe un compact K de X tel que $\{\Gamma b(t)\,;\, b \in C, t \in \mathbb{R}\} \subset K$.

La continuité de l'opérateur Γ résulte de iii) et du théorème 5.9 ; la relative compacité de $\Gamma(C)$ pour la topologie de la convergence compacte sur $\mathbb{R}$ résulte du théorème d'Ascoli. Pour récupérer la relative compacité de $\Gamma(C)$ pour la norme de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, nous utilisons l'hypothèse **(H1)** qui permet de montrer que l'équivalence entre la convergence compacte sur $\mathbb{R}$ et la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de $\mathcal{N}_f(u_n)$ vers $\mathcal{N}_f(u)$ lorsque $n \to \infty$.

6. Systèmes gradient

L'espace $\mathbb{R}^N$ est muni d'un produit scalaire $\ll \cdot \mid \cdot \gg$ où la norme associée est notée $\|\cdot\|$. Dans [9], nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence et l'unicité d'une solution bornée ou p.p. du système gradient suivant :

$$x'(t) + \nabla F(x(t)) = e(t) \tag{6.1}$$

où $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ est une fonction continue, $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^N$. Nous étudions aussi la continuité entre le second membre e et la solution

x. Pour cela, notons $BC(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)$ l'espace de Banach des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^N$, muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|$ et $AP(\mathbb{R}^N)$ l'espace des fonctions p.p. (au sens de Bohr) à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ (cf. la définiton 3.1, p. 13). $AP(\mathbb{R}^N)$ est un sous espace fermé de l'espace de Banach $BC(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)$. Nous notons aussi :

$$BC^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^N) = \left\{x \in BC(\mathbb{R},\mathbb{R}^N) \cap C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)\,;\, x' \in BC(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)\right\}$$

et

$$AP^1(\mathbb{R}^N) = \left\{x \in AP(\mathbb{R}^N) \cap C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)\,;\, x' \in AP(\mathbb{R}^N)\right\}.$$

Les espaces $BC^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)$ et $AP^1(\mathbb{R}^N)$, munis de la norme $\|x\|_{C^1} = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$, sont deux espaces de Banach. Pour tout $x \in BC^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)$, l'application $t \to x'(t) + \nabla F(x(t))$ est aussi dans $BC(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)$, ce qui permet de définir l'application

$$\mathcal{F} : BC^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^N) \to BC(\mathbb{R},\mathbb{R}^N) \quad \text{par} \quad \mathcal{F}(x)(t) = x'(t) + \nabla F(x(t)).$$

Dans cette étude les opérateurs de Nemytskii apparaissent implicitement, par exemple l'application $\mathcal{F}$ peut aussi s'écrire $\mathcal{F}(x) = x' + \mathcal{N}_{\nabla F}(x)$, où $\mathcal{N}_{\nabla F}$ est l'opérateur de Nemytskii du gradient ∇F. Avec cette notation, pour tout $x \in AP^1(\mathbb{R}^N)$, l'application $x' + \mathcal{N}_{\nabla F}(x)$ est aussi dans $AP(\mathbb{R}^N)$, ce qui permet de définir la restriction $\mathcal{F}_{ap}$ de l'application $\mathcal{F}$ de la manière suivante :

$$\mathcal{F}_{ap} : AP^1(\mathbb{R}^N) \to AP(\mathbb{R}^N) \quad \text{par} \quad \mathcal{F}_{ap}(x) = \mathcal{F}(x) \text{ pour } x \in AP^1(\mathbb{R}^N).$$

Théorème 6.1 (Theorem 1.1, [9]). *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) $\mathcal{F} : \left(BC^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_{C^1}\right) \to \left(BC(\mathbb{R},\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty\right)$ *est bicontinue (*$\mathcal{F}$ *est bijective et continue,* $\mathcal{F}^{-1}$ *est continue).*

ii) $\mathcal{F}_{ap} : \left(AP^1(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_{C^1}\right) \to \left(AP(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty\right)$ *est bicontinue.*

iii) $\nabla F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *est bicontinue.*

iv) F *est strictement convexe et vérifie :*

$$\lim_{\|x\|+\infty} \frac{\ll \nabla F(x) \mid x \gg}{\|x\|} = +\infty. \tag{6.2}$$

Les points i)-iii) du théorème 6.1 sont une généralisation du cas scalaire au cas vectoriel du résultat de l'article [130] de Slyusarchuk.

Les implications les plus simples sont $i) \implies ii) \implies iii)$. Par exemple pour $i) \implies ii)$, il suffit de montrer que $\mathcal{F}_{ap}$ est surjective, c'est-à-dire que la solution bornée obtenue par i) est p.p., lorsque le second membre est p.p.. La démonstration de $ii) \implies iii)$ est analogue à la précédente, en remarquant que lorsque l'on identifie l'ensemble des applications constantes à $\mathbb{R}^N$, l'application $\mathcal{F}_{ap}$ se réduit à ∇F. Pour l'implication $iv) \implies i)$, indiquons que la relation (6.2) sert à montrer l'existence d'une solution bornée en utilisant la méthode des *fonctions directrices* (cf. le théorème 10.7, p. 46).

Pour l'équivalence $iii) \iff iv)$, nous utilisons le fait que la surjectivité de ∇F est équivalente à (6.2), lorsque l'espace euclidien est de dimension finie. Pour un espace de Hilbert général, le gradient ∇F est surjectif si et seulement si $\lim_{\|x\|\to+\infty} F(x) - \ll p \mid x \gg = +\infty$, pour tout $p \in H$. La condition (6.2) implique la surjectivité de ∇F, mais la réciproque est fausse (cf. la proposition 2.13, p. 41 et la remarque 2.3, p. 43, [61]). Pour cette raison, le théorème 6.1 ne peut pas se généraliser à un espace de Hilbert de dimension infinie.

Dans le cas où le champ de vecteur de l'équation (6.1) est monotone et ne dérive pas d'un potentiel, c'est-à-dire

$$x'(t) + G(x(t)) = e(t)$$

où $G : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est une fonction continue vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^N, \qquad \ll G(x) - G(y) \mid x - y \gg \geq 0,$$

seules les implications $iv) \implies i) \implies ii) \implies iii)$ du théorème 6.1 restent justes, en remplaçant dans $iv)$, F est strictement convexe par G est strictement monotone. Par contre les implications $iii) \implies i), iii) \implies ii)$ et $i) \implies iv)$ sont fausses (cf. Proposition 1.2 et les remarques qui suivent dans [9]).

Une étude analogue a été faite pour l'équation du second ordre suivante :

$$x''(t) = \nabla F(x(t)) + e(t). \tag{6.3}$$

Pour cela, définissons d'une manière similaire au premier ordre, les applications suivantes :

$$\mathcal{G} : B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \to BC(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \quad \text{par} \quad \mathcal{G}(x)(t) = x'' - \mathcal{N}_{\nabla F}(x)$$

et

$$\mathcal{G}_{ap} : AP^2(\mathbb{R}^N) \to AP(\mathbb{R}^N) \quad \text{par} \quad \mathcal{G}_{ap}(x) = \mathcal{G}(x) \text{ pour } x \in AP^2(\mathbb{R}^N).$$

Théorème 6.2 (Theorem 1.3, [9])**.** *Les assertions suivantes sont équivalentes*

i) $\mathcal{G} : \left(BC^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N), \|\cdot\|_{C^2}\right) \to \left(BC(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty\right)$ *est bicontinue.*

ii) $\mathcal{G}_{ap} : \left(AP^2(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_{C^2}\right) \to \left(AP(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty\right)$ *est bicontinue.*

iii) $\nabla F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *est bicontinue.*

iv) F *est strictement convexe et vérifie* (6.2)*.*

Pour le cas où le champ de vecteurs de l'équation (6.3) est monotone et ne dérive pas d'un potentiel, l'étude a été faite dans (Proposition 1.5 et 1.6, [9]).

Deuxième partie 2. Solutions presque-périodiques de systèmes différentiels

7. Introduction

Dans cette partie, nous décrivons les principaux résultats des articles [4, 5, 6, 7, 8, 10, 23]. Il s'agit d'une étude sur les solutions presque-périodiques (p.p.) d'équations différentielles non linéaires et forcées par des oscillations p.p.. Les équations considérées sont essentiellement des équations du second ordre, et notamment des équations de Liénard. Cette étude porte sur la description des solutions bornées ou p.p., et sur le comportement asymptotique des solutions bornées de systèmes différentiels p.p., notamment nous établissons des résultats d'existence de solutions p.p..

Pour expliquer la stratégie adoptée pour établir l'existence de solutions p.p., nous considérons l'équation différentielle non linéaire p.p. suivante :

$$x'(t) = f(t, x(t)), \tag{7.1}$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $f : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^N$ est fonction p.p. en t uniformément par rapport à $x \in \mathbb{R}^N$. Rappelons que l'ensemble des valeurs d'une fonction p.p. est relativement compact, donc borné. Pour les définitions des fonctions p.p., nous renvoyons aux définitions 3.1 et 3.3, p. 13.

Dans le cas où l'équation (7.1) est périodique : il existe $T > 0$ tel que $f(t, x + T) = f(t, x)$, pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \Omega$; l'existence d'une solution bornée peut impliquer l'existence d'une solution périodique, par exemple si l'équation (7.1) est scalaire : $N = 1$ ou si elle est linéaire : $f(t, x) = A(t)x + B(t)$ (Massera, [106]). Par contre dans le cas p.p., ces derniers résultats sont faux, Opial [114] a construit une équation où toutes ses solutions sont bornées, mais dont aucune n'est p.p.. Dans le livre de Fink [84], on peut trouver un exemple d'équation linéaire scalaire p.p., c'est-à-dire : $x'(t) = a(t)x(t)$ avec $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction p.p., où toutes les solutions sont bornées sur $\mathbb{R}$, mais ne sont pas p.p., excepté la solution nulle (Example 6.1, p. 97, [84]).

Lorsque l'équation (7.1) admet au moins une solution bornée sur $\mathbb{R}$, nous voulons déterminer des conditions suffisantes pour que parmi ces solutions bornées, il y en ait au moins une qui soit p.p.. Ces conditions suffisantes permettront d'établir des résultats d'existence de solutions p.p., en établissant l'existence d'une solution bornée sur $\mathbb{R}$. Pour l'existence d'une solution bornée sur $\mathbb{R}$, un résultat classique que l'on peut trouver par exemple dans (Lemma 2, [83]), affirme que l'existence d'une solution bornée sur $[0, +\infty)$ suffit.

Théorème 7.1. *Soit $f \in AP_U(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ (cf. définition 3.3, p. 13). Si l'équation* (7.1) *admet une solution bornée sur* $[0, +\infty)$*, alors* (7.1) *admet au moins une solution bornée sur* $\mathbb{R}$.

La question de l'existence de solutions p.p. pour les équations aux dérivées partielles (EDP) a été étudiée à partir des années 50 par des mathématiciens italiens, Amerio, Biroli, Prouse et d'autres [33]-[39], [45]-[47], [120], [121] ; puis Dafermos, Haraux et Ishii ont apporté de grandes contributions à ces questions [72], [88], [90]-[92], [95]. Le *principe du minimax*, dû à Amerio (cf. [39]), est une généralisation pour les EDP non linéaires de la théorie de Favard portant sur les équations différentielles ordinaires (EDO) linéaires [80, 81]. Le *principe de minimax* d'Amerio affirme que si pour chaque équation d'une famille d'équations engendrées par l'équation initiale, il existe une et une seule solution à valeurs dans un même compact qui minimise la norme de la convergence uniforme sur la droite réelle, alors elle est p.p.. Ce principe résout la question de l'existence de solutions p.p. pour les équations dissipatives du type : la fonction $t \to \|u(t) - v(t)\|$ est décroissante, pour toutes solutions u et v.

Pour établir l'existence d'une solution p.p. parmi les solutions bornées sur $\mathbb{R}$, nous avons essentiellement utilisé un résultat de Fink (Theorem 2, [83]), publié en 1968 qui a été très peu cité dans la littérature. C'est une généralisation du *principe du minimax* d'Amerio, dans le cadre des EDO définies sur $\mathbb{R}^N$. Ce résultat donne une condition suffisante pour qu'une solution à valeurs dans un compact K de l'équation (7.1) soit p.p.. Cette condition suffisante est l'existence et l'unicité d'une solution à valeurs dans un compact qui minimise une fonctionnelle qui n'est pas nécessairement la norme de la convergence uniforme. Pour simplifier l'exposé, dans un premier temps, nous énonçons un cas particulier de ce résultat (Fink, Corollary 1, [83]) que nous avons utilisé. Ce corollaire permet de réduire l'existence d'une solution p.p. à l'existence et l'unicité de la solution bornée d'une famille d'équations engendrées par l'équation (7.1). Avant de citer ce résultat, nous définissons quelques notions.

Définition 7.2. *i) Pour $u \in AP(\mathbb{R}^N)$ (cf. définition 3.1, p. 13), l'enveloppe de u, notée $H(u)$ est définie par $v \in H(u)$ si et seulement s'il existe une suite numérique $(t_n)_n$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t+t_n) - v(t)\| = 0.$$

ii) Pour $f \in AP_U(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ (cf. définition 3.3, p. 13), l'enveloppe de f, notée $H(f)$ est définie par $g \in H(f)$ si et seulement si pour tout compact K de $\mathbb{R}^N$, il existe une suite numérique $(t_n)_n$, telle que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{x\in K} \|f(t+t_n, x) - g(t,x)\| = 0.$$

Proposition 7.3. *Si $u \in AP(\mathbb{R}^N)$, alors u admet une moyenne :*

$$\mathcal{M}\{u(t)\}_t = \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} u(t)\,dt.$$

Remarque 7.4. *Plus précisément la convergence de la moyenne temporelle est uniforme sur les translations de la fonction u, c'est-à-dire*

$$\lim_{r\to+\infty} \sup_{s\in\mathbb{R}} \left\| \frac{1}{2r} \int_{-r+s}^{r+s} u(t)\,dt - \mathcal{M}\{u(t)\}_t \right\| = 0,$$

cf. (II, p. 21 [39]*).*

Définition 7.5. *1- Pour $u \in AP(\mathbb{R}^N)$, le module des fréquences de u, noté mod(u) est le sous-groupe de $\mathbb{R}$ engendré par l'ensemble des exposants de Fourier-Bohr non nuls de u :*

$$\Lambda(u) = \left\{\lambda \in \mathbb{R}\,;\, \mathcal{M}\{u(t)\mathrm{e}^{-i\lambda t}\}_t \neq 0\right\}.$$

2- Pour $f \in AP_U(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, le module des fréquences de f, noté mod(f) est le sous-groupe de $\mathbb{R}$ engendré par l'ensemble des exposants de Fourier-Bohr non nuls de $t \mapsto f((t,\cdot)$:

$$\Lambda(f) = \bigcup_{x\in\mathbb{R}^N} \left\{\lambda \in \mathbb{R}\,;\, \mathcal{M}\{f(t,x)\mathrm{e}^{-i\lambda t}\}_t \neq 0\right\}.$$

Maintenant, nous donnons une propriété très utile pour les fonctions p.p. qui est une conséquence de la définition de la presque-périodicité.

Proposition 7.6 (Principe de reconstruction d'une fonction p.p.)**.** *1- Toute fonction p.p. est uniformément récurrente : il existe une suite numérique $(t_n)_n$, telle que $\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty$ et*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t+t_n) - u(t)\| = 0.$$

2- Si $f \in AP_U(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, alors pour tout compact K de $\mathbb{R}^N$, il existe une suite numérique $(t_n)_n$ telle que $\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty$ et

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{x\in K} \|f(t+t_n, x) - f(t,x)\| = 0.$$

Remarque 7.7. *i) Cette proposition est aussi vérifiée lorsque $\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty$ est remplacé par $\lim_{n\to+\infty} t_n = -\infty$.*

ii) Ce principe de reconstruction montre qu'une fonction p.p. est déterminée d'une manière unique par son image sur $[0,+\infty)$.

iii) La proposition 7.6 permet d'affirmer que si $u \in AP(\mathbb{R}^N)$ (resp. $f \in AP_U(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$), alors $u \in H(u)$ (resp. $f \in H(f)$).

Le résultat de Fink que nous avons utilisé est le suivant :

Théorème 7.8 (Fink, Corollary 1, [83])**.** *Soit $f \in AP_U(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ et K un compact de $\mathbb{R}^N$. Si pour tout $f_* \in H(f)$, l'équation*

$$u'(t) = f_*(t, u(t)), \tag{7.2}$$

admet une et une seule solution à valeurs dans K, alors cette solution est p.p.. En particulier l'équation (7.1) *admet une et une seule solution u p.p.. De plus cette solution vérifie*

$$mod(u) \subset mod(f). \tag{7.3}$$

Remarque 7.9. *La formule des modules* (7.3) *ne se trouve pas dans l'article* [83]*, mais elle est démontrée dans le livre de Fink (Theorem 9.10, p. 167,* [84]*).*

Si l'équation (7.1) admet au moins une solution à valeurs dans K, alors il en est de même de l'équation (7.2) pour $f_* \in H(f)$ (Lemma 2, [83]). Si de plus les hypothèses sur f sont stables par passage à la limite, alors pour tout $f_* \in H(f)$, f_* vérifie les mêmes hypothèses que celles de f. Pour cette raison, pour appliquer le théorème 7.8, il suffit en général de montrer l'unicité de la solution à valeurs dans K pour l'équation (7.1). Pour obtenir cette unicité, notre stratégie consiste à construire une *fonction de type Liapounov appliquée sur la différence de deux solutions* à valeurs dans K. Plus précisément, nous considérons une application $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue telle que pour toutes solutions u et v à valeurs dans K de l'équation (7.1), on ait, en notant $r(t) = q(u(t) - v(t))$,

(C1) r est décroissante sur $\mathbb{R}$,

(C2) si r est constante sur $\mathbb{R}$, alors $u = v$.

Cette stratégie sera utilisée dans les paragraphes 8, 9 et 12.

Ici, nous expliquons pourquoi une fonctionnelle q vérifiant **(C1)** et **(C2)**, permet d'obtenir l'unicité d'une solution à valeurs dans K de l'équation (7.1). Considèrons deux solutions u et v à valeurs dans K de l'équation (7.1). En appliquant le principe de reconstruction d'une fonction p.p. à la fonction f, on en déduit l'existence d'une suite numérique croissante $(t_n)_n$, telle que $\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty$ et

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{x\in K} \|f(t+t_n, x) - f(t,x)\| = 0.$$

Avec **(C1)**, on obtient $\lim_{n\to+\infty} r(t+t_n) = \inf_{s\in\mathbb{R}} r(s)$, puis en utilisant le théorème d'Ascoli sur les familles de fonctions $\{t \to u(t+t_n)\,;\, n\in\mathbb{N}\}$ et $\{t\to v(t+t_n)\,;\, n\in\mathbb{N}\}$, on en déduit l'existence de deux solutions u_* et v_* de l'équation (7.1) à valeurs dans K vérifiant pour tout $t\in\mathbb{R}$, $q(u_*(t) - v_*(t)) = \inf_{s\in\mathbb{R}} r(s)$. En utilisant **(C2)**, on obtient $u_* = v_*$, donc $\inf_{s\in\mathbb{R}} r(s) = q(0)$. De la même manière, on en déduit que $\sup_{s\in\mathbb{R}} r(s) = q(0)$, ainsi $r(t) = q(0)$, pour tout $t\in\mathbb{R}$. De nouveau avec **(C2)**, on obtient que $u = v$, ce qui montre le résultat d'unicité de la solution à valeurs dans K de l'équation (7.1).

Lorsqu'il n'est pas possible d'appliquer le théorème 7.8, c'est-à-dire de déterminer l'existence et l'unicité d'une solution à valeurs dans un compact donné, il est possible de restreindre l'étude de cette unicité à l'ensemble des points qui minimisent une fonctionnelle, en utilisant le résultat principal de [83]. Pour énoncer ce résultat de Fink, nous avons besoin de donner quelques notations et définitions. Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$. Notons par $C_K(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)$ l'ensemble :

$$C_K(\mathbb{R},\mathbb{R}^N) = \left\{u\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)\,;\, \forall t\in\mathbb{R},\quad u(t)\in K\right\};$$

et u_τ pour $\tau\in\mathbb{R}$ et $u\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)$, la fonction définie par $u_\tau(t) = u(\tau+t)$ pour $t\in\mathbb{R}$. Dans [83], Fink appelle une *fonctionnelle sous-variante* associée au compact K, une application $\lambda_K : C_K(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)\to\mathbb{R}$ vérifiant la condition suivante :

$$\text{si } u_{\tau_n}\to v \text{ uniformément sur tout compact de } \mathbb{R}, \text{ alors } \lambda_K(v)\le\lambda_K(u). \tag{7.4}$$

Pour $f_*\in H(f)$, notons $\mathcal{F}_K(f_*)$ l'ensemble des solutions de l'équation (7.2) vérifiant $u(t)\in K$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. Une solution x_* de l'équation (7.2) est dite K-minimale si

$$u_*\in\mathcal{F}_K(f_*) \qquad \text{et} \qquad \lambda_K(u_*) = \inf\left\{\lambda_K(u)\,;\, u\in\mathcal{F}_K(f_*)\right\}. \tag{7.5}$$

Théorème 7.10 (Fink, Theorem 2, [83])**.** *Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$ et λ_K une fonctionnelle sous-variante associée à K. Supposons que $f\in AP_U(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)$ et que l'équation* (7.1) *admette au moins une solution définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans K. Si pour tout $f_*\in H(f)$, l'équation* (7.2) *admet une et une seule solution K-minimale, alors cette solution est p.p.. En particulier l'unique solution K-minimale de l'équation* (7.1) *est p.p..*

Remarque 7.11. *De plus cette solution K-minimale u de l'équation* (7.1) *vérifie la formule des modules* (7.3)*.*

Dans le cadre des EDO, ce dernier théorème contient le principe du minimax d'Amerio en choisissant la fonctionnelle sous-variante

$$\lambda_K(u) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t)\|\,. \tag{7.6}$$

Dans le cas où l'équation (7.1) est dissipative, c'est-à-dire

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^N, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \ll f(t,x) - f(t,y) \mid x - y \gg \leq 0,$$

l'existence d'une solution à valeurs dans K implique l'existence et l'unicité d'une solution K-minimale pour la fonctionnelle sous-variante (7.6) ; en conséquence l'existence d'une solution à valeurs dans K implique l'existence d'une solution p.p.. Pour les équations dissipatives, la question de l'existence d'une solution p.p. étant résolue, nous voulons appliquer le théorème 7.10 pour des fonctionnelles sous-variante du type

$$\lambda_K(u) = \sup_{t\in\mathbb{R}} q(u(t)) \tag{7.7}$$

où $q : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique qui n'est pas définie positive. La principale difficulté pour appliquer le théorème 7.10 est de montrer l'unicité de la solution K-minimale pour chaque équation (7.2). Si les hypothèses sur f sont stables par passage à la limite, il suffit de montrer l'unicité de la solution K-minimale de l'équation (7.1). Pour cela nous imposons les hypothèses suivantes sur la fonctionnelle quadratique q : pour toutes solutions u et v à valeurs dans K de l'équation (7.1), on ait, en notant $r(t) = q(u(t)-v(t))$,

(C3) r est décroissante sur $\mathbb{R}$,

(C4) si r est constante sur $\mathbb{R}$, alors $\frac{1}{2}(u+v)$ est une solution de l'équation (7.1).

(C5) si r est constante sur $\mathbb{R}$ et cette constante est négative ou nulle, alors $u = v$.

Cette stratégie sera utilisée dans les paragraphes 10 et 11. Dans le paragraphe 10, nous avons utilisé une forme quadratique q vérifiant **(C3)-(C5)** et où les valeurs propres de la matrice symétrique associée à q sont non nulles et de signe quelconque. En fait sous la condition **(C3)**, on a l'équivalence

$$(\mathbf{C5}) \iff \forall t \in \mathbb{R},\ r(t) \geq 0 \text{ et } r(t) = 0 \implies u = v$$

(cf. la démonstration du Lemma 3.4 dans [8]).

Ici, nous expliquons pourquoi une forme quadratique q vérifiant les conditions **(C3)-(C5)**, permet d'obtenir l'unicité de la solution K-minimale de l'équation (7.1). Considérons deux solutions u_* et v_* K-minimales de l'équation (7.1) :

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} q\left(u_*(t)\right) = \sup_{t\in\mathbb{R}} q\left(v_*(t)\right) = \delta := \inf\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}} q\left(u(t)\right)\ ;\ u \in \mathcal{F}_K(f)\right\}.$$

D'une manière analogue à celle utilisée sur la fonctionnelle vérifiant les conditions **(C1)** et **(C2)**, en utilisant le principe de reconstruction d'une fonction p.p. et le théorème d'Ascoli, on démontre que l'hypothèse **(C3)** permet de réduire l'étude de cette unicité parmi les solutions K-minimales u_* et v_* vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad q(u_*(t) - v_*(t)) = c_*.$$

En choisissant un compact K convexe, l'hypothèse **(C4)**, permet d'affirmer

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} q\left(\frac{u_*(s) + v_*(s)}{2}\right) \geq \delta.$$

De l'identité du parallélogramme

$$q\left(\frac{u_*(t) + v_*(t)}{2}\right) + q\left(\frac{u_*(t) - v_*(t)}{2}\right) = \frac{1}{2} q\left(u_*(t)\right) + \frac{1}{2} q\left(v_*(t)\right),$$

nous obtenons

$$\delta + \frac{c_*}{4} \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} q\left(\frac{u_*(t)+v_*(t)}{2}\right) + \frac{c_*}{4} \leq \frac{1}{2}\sup_{t\in\mathbb{R}} q\left(u_*(t)\right) + \frac{1}{2}\sup_{t\in\mathbb{R}} q\left(v_*(t)\right) = \delta,$$

donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad q(u_*(t) - v_*(t)) = c_* \leq 0.$$

L'hypothèse **(C5)** permet de conclure que $u_* = v_*$, ce qui montre le résultat d'unicité de la solution K-minimale de l'équation (7.1).

Signalons que certains résultats des articles [5, 7, 8, 10] présentés dans cette partie ont été généralisés dans le cadre des systèmes dynamiques par Carabello et Cheban [65, 66, 68].

8. Équation du second ordre avec un champ de vecteurs monotone

Dans ce paragraphe, nous décrivons les principaux résultats des articles [5, 23]. Dans [5], pour une équation du second ordre avec un champ de vecteurs monotone défini sur $\mathbb{R}^n$, nous établissons l'existence d'une solution bornée, puis nous montrons que toute les solutions bornées sont p.p.. Dans [23], écrit en collaboration avec J. Blot et M. Ayachi, nous prolongeons ces résultats au cas de la dimension infinie, c'est-à-dire lorsque $\mathbb{R}^N$ est remplacé par un espace de Hilbert $(H, \ll \cdot \mid \cdot \gg)$ général.

L'équation considérée est

$$x''(t) = f(t, x(t)), \tag{8.1}$$

où $f : \mathbb{R} \times K \to \mathbb{R}^N$ est une application continue et K un sous ensemble **compact** et **convexe** de $\mathbb{R}^N$. Une solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation (8.1) est une fonction x de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on ait $\mathbf{x}(\mathbf{t}) \in \mathbf{K}$ et $x''(t) = f(t, x(t))$. Remarquons qu'une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (8.1) est nécessairement **bornée**. Le *cône normal* au sous-ensemble convexe K au point $x \in K$ est noté par $N(K, x)$ et est défini par

$$N(K,x) = \left\{p \in \mathbb{R}^N ; \forall y \in K, \ll p \mid y - x \gg \leq 0\right\}.$$

Les hypothèses utilisées dans le résultat principal de [5] sont :

(H1) f est p.p. en t uniformément par rapport à $x \in K$.

(H2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application partielle $f(t, \cdot)$ est monotone sur K, c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in K, \qquad \ll f(t,x) - f(t,y) \mid x - y \gg \geq 0.$$

(H3) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \partial K$ (frontière de K), $\forall p \in N(K, x)$, on a $\ll f(t,x) \mid p \gg \geq 0$.

Soit x et y sont deux solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation (8.1), donc bornées sur $\mathbb{R}$. Notons par r la fonction $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $r(t) = \frac{1}{2}\left\|x(t) - y(t)\right\|^2$. Rappelons qu'une fonction convexe et bornée sur $\mathbb{R}$ est constante. Ce dernier argument appliqué à la fonction r, a permis d'améliorer et de généraliser plusieurs travaux [43, 64, 141], notamment de ne pas imposer que f soit fortement monotone : il existe $c_* > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in K, \qquad \ll f(t,x) - f(t,y) \mid x - y \gg \geq c_* \left\|x - y\right\|^2,$$

contrairement à ce qui est fait dans ces travaux. Cet argument sur une fonction convexe et bornée sur $\mathbb{R}$, permet d'établir que la différence $x - y$ de deux solutions est une fonction constante. En effet l'hypothèse **(H2)** implique que

$$r''(t) = \ll f(t, x(t)) - f(t, y(t)) \mid x(t) - y(t) \gg + \|x'(t) - y'(t)\|^2 \geq 0,$$

donc la fonction r est convexe et bornée sur $\mathbb{R}$; ainsi r est une fonction constante, par conséquent $x' = y'$. Dans un premier temps, on établit l'existence d'au moins une solution de l'équation (8.1) définie sur $\mathbb{R}$; et ensuite pour montrer l'existence d'une solution p.p., on applique le théorème 7.8, p. 31. Pour cela, on choisit une solution x_0 de l'équation (8.1) définie sur $\mathbb{R}$ et on considère le sous-ensemble compact K_0 de K défini par $K_0 = \overline{x_0(\mathbb{R})}$. Le fait que la différence de deux solutions est une constante permet de montrer l'unicité de la solution à valeurs dans K_0. Le résultat principal de [5] est le suivant.

Théorème 8.1 (Theorem 1.1, [5])**.** *Si les hypothèses* **(H1)-(H3)** *sont vérifiées, alors*

i) l'équation (8.1) *admet au moins une solution x p.p. vérifiant $mod(x) \subset mod(f)$,*

ii) si x et y sont deux solutions de l'équation (8.1) *définies sur $\mathbb{R}$, alors leur différence est une fonction constante, en particulier toutes les solutions l'équation* (8.1) *sont p.p..*

iii) Si de plus il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que l'application partielle $f(t_0, \cdot)$ soit strictement monotone ($\ll f(t_0, x) - f(t_0, y) \mid x - y \gg > 0$ pour tous $x \neq y$), alors l'équation (8.1) *admet une unique solution p.p..*

Remarque 8.2. *L'hypothèse* **(H3)** *est utilisée pour établir l'existence d'une solution de l'équation* (8.1)*. Pour construire une solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation* (8.1)*, donc à valeurs dans le compact K, nous plongeons cette dernière équation dans une famille d'équations périodiques :*

$$x''(t) = g_T(t, x(t)), \qquad T > 0, \tag{8.2}$$

où $g_T : \mathbb{R} \times K \to \mathbb{R}^N$ est une application continue vérifiant $g_T(t + 4T, x) = g_T(t, x)$ pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times K$ et $f(t, x) = g_T(t, x)$ pour tout $(t, x) \in [-T, T] \times K$. Pour obtenir l'existence d'une solution périodique x_T de l'équation périodique (8.2)*, nous appliquons un théorème de continuation de Mawhin (Theorem IV.5, p. 44,* [107]*) utilisant la notion de degré topologique de Leray-Schauder. Puis en établissant des estimations indépendantes de T sur la famille de solutions $(x_T)_{T>0}$, nous obtenons une solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation* (8.1) *par passage à la limite.*

Remarque 8.3. *1- Dans le cas particulier où ∂K est une variété différentielle de classe C^1, l'hypothèse* **(H3)** *peut s'énoncer sous la forme équivalente : pour tout $x \in \partial K$, pour tout vecteur $n(x)$ normal unitaire sortant à K,*

$$\ll f(t, x) \mid n(x) \gg \geq 0. \tag{8.3}$$

2- Dans le cas particulier où K est une boule fermée : $K = \overline{B}(x_0, r)$, le cône normal en $x \in \partial K$ est $N(K, x) = \{\lambda(x - x_0) \,;\, \lambda \geq 0\}$ et **(H3)** *peut s'énoncer sous la forme équivalente :*

$$\|x - x_0\| = r \Longrightarrow \ll f(t, x) \mid x - x_0 \gg \geq 0.$$

En particulier dans le cas scalaire, c'est-à-dire $N = 1$ et $K = [a, b]$, l'hypothèse **(H3)** *devient*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t, a) \leq 0 \leq f(t, b).$$

Cette condition a été donnée par Opial en 1959 dans [111] *pour établir l'existence d'une solution x vérifiant $a \leq x(t) \leq b$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

Le théorème 8.1 est une généralisation du résultat (Theorem 4.3, [141]) de Zakharin et Parasyuk dans le cas particulier où $f(t,x) = \nabla_x V(t,x)$ dérive d'un potentiel convexe et le bord de K est une sous variété différentielle de classe C^1. Plus précisément Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, K est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^N$ tels que $K \subset \Omega$ et $V : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ est une application continue telle que l'application $V(t,\cdot)$ soit de classe C^1 sur Ω pour tout $t \in \mathbb{R}$. Notons par $\nabla V_x(t,x)$ le gradient de l'application partielle $V(t,\cdot)$ au point x et considérons l'équation suivante :

$$x''(t) = \nabla_x V(t, x(t)). \tag{8.4}$$

Dans le cadre particulier des équations quasi-périodiques, c'est-à-dire $\nabla_x V$ est p.p. et le module de $\nabla_x V$ est engendré par un nombre fini de fréquences fondamentales $\omega_1, \cdots, \omega_k$: $mod(\nabla_x V) = \{\lambda_1\omega_1 + \cdots + \lambda_k\omega_k \,;\, \lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$, dans (Theorem 4.3, [141]), Zakharin et Parasyuk montrent l'existence et l'unicité de la solution quasi-périodique en supposant que le potentiel V est de classe C^2 et vérifie : il existe $c_* > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in \Omega, \qquad \ll \nabla_x V(t,x) - \nabla_x V(t,y) \mid x - y \gg \geq c_* \|x - y\|^2 . \tag{8.5}$$

De plus, pour l'hypothèse **(H3)**, les auteurs impose que l'inégalité (8.3) soit stricte.

Voici plusieurs corollaires du théorème 8.1 qui sont des améliorations de résultats connus.

Notons par P_K le projecteur orthogonal sur le convexe fermé K et par K_δ l'ensemble suivant $K_\delta := \left\{x \in \mathbb{R}^N \,;\, d(x,K) \leq \delta\right\}$. Alors il existe donc $\delta > 0$ tel que $K_\delta \subset \Omega$.

Corollaire 8.4 (Corollary 2.1, [5])**.** *Si l'application $\nabla_x V$ est p.p. en t uniformément par rapport à $x \in \Omega$, l'application $V(t,\cdot)$ est convexe et l'application V vérifie :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in K_\delta, \qquad V(t,x) \geq V(t, P_K(x)), \tag{8.6}$$

alors

i) l'équation (8.4) *admet au moins une solution x p.p. vérifiant $mod(x) \subset mod(\nabla_x V)$,*

ii) si x et y sont deux solutions de l'équation (8.4) *définies sur $\mathbb{R}$, alors leur différence est une fonction constante, en particulier toutes les solutions l'équation* (8.4) *sont p.p..*

Si de plus il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que l'application partielle $\nabla_x V(t_0,\cdot)$ soit strictement convexe, alors l'équation (8.4) *admet une unique solution p.p..*

Remarque 8.5. *Dans le cas quasi-périodique, la condition* (8.6) *a été donnée par Zakharin et Parasyuk (Theorem 4.2,* [141]*) pour établir l'existence et l'unicité de la solution quasi-périodique de l'équation* (8.4)*. Les auteurs imposent aussi que le potentiel V soit de classe C^2 et vérifie* (8.5)*.*

Un cas particulier de l'équation (8.4) est le suivant :

$$x''(t) = \nabla V(x(t)) + e(t) \tag{8.7}$$

où $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ est une application continue et $V : \Omega \to \mathbb{R}$ est une application de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$. Désignons par $\nabla V(x)$ le gradient de V au point x. Le théorème 8.1 permet d'obtenir pour l'équation (8.7) un premier corollaire (corollaire 8.6) dont le modèle est l'équation du pendule autour de l'équilibre instable $\theta_0 = \pi$ et un second corollaire (corollaire 8.8) où l'équation est définie sur tout l'espace $\mathbb{R}^N$.

Corollaire 8.6 (Remark 1.4, [5])**.** *Soit $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Supposons que $\Omega = B(x_0, R)$, $V(x_0) = \min_{x\in\Omega} V(x)$ et que l'application V soit fortement convexe : il existe $c_* > 0$ tel que*

$$\forall x, y \in \Omega, \qquad \ll \nabla V(x) - \nabla V(y) \mid x - y \gg \geq c_* \|x - y\|^2 .$$

Si e est p.p. et si $\|e\|_\infty < c_* R$, alors l'équation (8.7) admet une unique solution x p.p. vérifiant

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t) - x_0\| \leq \frac{\|e\|_\infty}{c_*}.$$

La formule des modules, $mod(x) \subset mod(e)$, est aussi vérifiée.

Remarque 8.7. *Ce dernier corollaire est une forme légèrement plus générale que celle du résultat de Carminati (Theorem 1,* [64]*). Pour l'équation du pendule : $\theta''(t) + \sin(\theta(t)) = e(t)$ autour de l'équilibre instable $\theta_0 = \pi$, le corollaire 8.6 permet d'établir l'existence et l'unicité de la solution p.p. ; plus précisément si e est p.p. et $\|e\|_\infty < R_0 \cos(R_0)$ avec $0 < R_0 < \frac{\pi}{2}$, alors il existe une unique solution θ vérifiant $\sup_{t\in\mathbb{R}} |\theta(t) - \pi| \leq \dfrac{1}{\cos(R_0)} \|e\|_\infty$. La meilleure constante R_0 est la solution de $\max_{0<R<\frac{\pi}{2}} R\cos(R)$, c'est-à-dire l'unique solution de $R\tan(R) = 1$ dans $(0, \frac{\pi}{2})$.*

Corollaire 8.8 (Corollary 2.2, [5])**.** *On suppose que $\Omega = \mathbb{R}^N$. Si e est p.p., V est convexe et vérifie $\lim_{\|x\|\to+\infty} \dfrac{V(x)}{\|x\|} = 0$, alors*

i) l'équation (8.7) admet au moins une solution x p.p. vérifiant $mod(x) \subset mod(e)$,

ii) si x et y sont deux solutions de l'équation (8.7) définies et bornées sur $\mathbb{R}$, alors leur différence est une fonction constante, en particulier toutes les solutions bornées de l'équation (8.7) sont p.p..

Si de plus l'application V est strictement convexe, alors l'équation (8.7) admet une unique solution p.p..

Remarque 8.9. *Ce dernier corollaire est une amélioration d'un résultat de Berger et Chen (Theorem 4-6,* [43]*). Les auteurs imposent que V soit fortement convexe ainsi que d'autres hypothèses supplémentaires. Par exemple pour l'équation*

$$x''(t) = \|x(t)\|^2 x(t) + e(t)$$

avec e une fonction p.p., le résultat de Berger et Chen ne permet pas d'obtenir l'existence et l'unicité de la solution p.p., contrairement au corollaire 8.8.

Maintenant, nous discutons de l'extension de ces résultats au cas de la dimension infinie, c'est-à-dire lorsque $\mathbb{R}^N$ est remplacé par un espace de Hilbert H général. Rappelons que $AP(H)$ désigne l'espace des fonctions p.p. (au sens de Bohr) à valeurs dans H (cf. la définition 3.1, p. 13). La dimension finie de l'espace de Hilbert H est utilisée d'une manière essentielle pour construire une solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation (8.1). En effet, pour construire une telle solution (cf. la remarque 8.2), nous avons utilisé un théorème de continuation de Mawhin dans lequel intervient l'opérateur linéaire $L : AP(H) \to AP(H)$ défini par

$$D(L) = \left\{x \in AP(H) \cap C^2(\mathbb{R}, H) \,;\, x' \in AP(H) \text{ et } x'' \in AP(H)\right\} \text{ et } Lx = x'';$$

qui doit être un opérateur de Fredholm, donc son noyau : $Ker(L) = H$ doit être de dimension finie. Par contre si l'on admet l'existence d'une solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation (8.1), alors toute les autres conclusions du résultat principal subsistent lorsque l'espace de Hilbert H est de dimension infinie, en particulier toutes les solutions définies sur $\mathbb{R}$ sont p.p.. Dans le cas où le champ de vecteurs de l'équation est lipschitzien, nous avons déduit du résultat principal de [118] (Perov) (cf. le théorème 16.5, p. 66), un théorème d'existence et d'unicité de la solution p.p. pour l'équation (8.1) lorsque f est définie sur tout l'espace ($K = H$). Pour une application continue $f : \mathbb{R} \times H \to H$, les hypothèses utilisées sont :

(H4) f est lipschitzienne en x uniformément par rapport à $t \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire : il existe $k_* > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in K, \qquad \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k_* \|x - y\| .$$

(H5) f est fortement monotone en x uniformément par rapport à $t \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire : il existe $c_* > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in K, \qquad \ll f(t,x) - f(t,y) \mid x - y \gg \geq c_* \|x - y\|^2 .$$

Théorème 8.10 (Theorem 3.3, [23])**.** *Si les hypothèses* **(H4)-(H5)** *sont vérifiées et f est p.p. en t uniformément par rapport à $x \in H$, alors l'équation* (8.1) *admet une unique solution p.p..*

Pour s'affranchir de l'hypothèse de Lipschitz portant sur f dans le cas où l'espace de Hilbert H est de dimension infinie, nous utilisons une notion de *solution p.p. faible* dans des sous-espaces de fonctions *p.p. au sens de Besicovitch* [44, 117]. L'équation considérée est :

$$x''(t) = f(x(t)) + e(t) \tag{8.8}$$

où $e : \mathbb{R} \to H$ est une fonction p.p. et $f : H \to H$ est une application continue et monotone, c'est-à-dire

$$\forall x, y \in H, \qquad \ll f(x) - f(y) \mid x - y \gg \geq 0.$$

Notons $\mathcal{B}^2(H)$ l'espace des fonctions p.p. au sens de Besicovitch (d'ordre 2) à valeurs dans H. Rappelons que $\mathcal{B}^2(H)$ est le complété de l'espace préhilbertien $AP(H)$ muni du produit scalaire $(x \mid y)_{\mathcal{B}^2} = \lim\limits_{T \to +\infty} \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{-T}^{T} \ll x(t) \mid y(t) \gg \, dt$ pour x et $y \in \mathcal{B}^2(H)$. Si $x \in \mathcal{B}^2(H)$, alors x admet un développement en *série de Fourier-Bohr* : $x \sim \displaystyle\sum_{\lambda \in \mathbb{R}} a(x,\lambda) \mathrm{e}^{i\lambda t}$, où $a(x,\lambda) = \lim\limits_{T \to +\infty} \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{-T}^{T} x(t) \mathrm{e}^{-i\lambda t} \, dt$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) sont les *coefficients de Fourier-Bohr* de x. Pour $x \in \mathcal{B}^2(H)$, l'ensemble des exposants de x : $\Lambda(x) = \{\lambda \in \mathbb{R}\,;\, a(x,\lambda) \neq 0\}$ est au plus dénombrable, $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathbb{R}} \|a(x,\lambda)\|^2 < +\infty$ et $|x|_{\mathcal{B}^2}^2 = \displaystyle\sum_{\lambda \in \mathbb{R}} \|a(x,\lambda)\|^2$. L'ensemble $\mathcal{B}^2(H)$ est l'ensemble des séries de Fourier-Bohr au sens suivant, pour toute famille $a_{\lambda \in \mathbb{R}}$ d'éléments de H vérifiant $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathbb{R}} \|a_\lambda\|^2 < +\infty$, il existe un unique $x \in \mathcal{B}^2(H)$ tel que $x \sim \displaystyle\sum_{\lambda \in \mathbb{R}} a_\lambda \mathrm{e}^{i\lambda t}$. Pour définir la notion de solution p.p. faible, nous utilisons les espaces de type Sobolev sur l'espace $\mathcal{B}^2(H)$ construits par Blot dans [52]. La dérivée généralisée de $x \in \mathcal{B}^2(H)$ (quand elle existe) est $\nabla x \in \mathcal{B}^2(H)$ telle que

$$\lim_{\tau \to 0} \left| \nabla x(t) - \frac{x(t+\tau) - x(t)}{\tau} \right|^2_{\mathcal{B}^2} = 0.$$

Notons $\mathcal{B}^{1,2}(H)$ l'espace des $x \in \mathcal{B}^2(H)$ pour lesquels ∇x existent dans $\mathcal{B}^2(H)$. Si $x \in \mathcal{B}^{1,2}(H)$, alors x et ∇x ont un développement en série de Fourier-Bohr avec $\nabla x \sim \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} i\lambda a(x,\lambda) \mathrm{e}^{i\lambda t}$. Notons $\mathcal{B}^{2,2}(H)$ l'espace des $x \in \mathcal{B}^{1,2}(H)$ tels que $\nabla^2 x = \nabla(\nabla x)$ existe dans $\mathcal{B}^2(H)$. L'espace $\mathcal{B}^{2,2}(H)$ muni de la norme

$$|x|_{\mathcal{B}^{2,2}} = \left(|x|^2_{\mathcal{B}^2} + |\nabla x|^2_{\mathcal{B}^2} + \left|\nabla^2 x\right|^2_{\mathcal{B}^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

est un espace de Hilbert [52]. Nous dirons que x est une *solution p.p. faible* de l'équation (8.8) si $x \in \mathcal{B}^{2,2}(H)$ et

$$\nabla^2 x(t) = f(x(t)) + e(t), \qquad \text{égalité dans } \mathcal{B}^2(H).$$

La notion de solution p.p. faible peut se traduire en termes de coefficients de Fourier-Bohr, elle équivaut à dire qu'il y a égalité de ces coefficients :

$$a(\nabla^2 x, \lambda) = -\lambda^2 a(x,\lambda) = a(f \circ x, \lambda) + a(e, \lambda), \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Par opposition, une *solution p.p. forte* est une solution au sens classique de l'équation (8.8), c'est-à-dire $x \in C^2(\mathbb{R}, H) \cap AP(H)$ et x vérifie l'équation (8.8). Évidemment une solution p.p. forte est une solution p.p. faible. Pour obtenir une solution p.p. faible nous utilisons la théorie des *opérateurs maximaux monotones* [61, 129]. Les opérateurs considérés sont :

$$\begin{cases} L : \mathcal{B}^2(H) \longrightarrow \mathcal{B}^2(H), \\ D(L) = \mathcal{B}^{2,2}(H) \quad \text{et} \quad Lx = -\nabla^2 x, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} F : \mathcal{B}^2(H) \longrightarrow \mathcal{B}^2(H), \\ D(F) = \{x \in \mathcal{B}^2(H) : f \circ x \in \mathcal{B}^2(H)\} \quad \text{et} \quad F(x) = f \circ x. \end{cases}$$

Pour éviter de faire une hypothèse sur du type : $\|f(x)\| \leq a\|x\| + b$ pour tout $x \in H$ (avec a et $b \geq 0$), nous avons choisi de ne pas définir l'opérateur de superposition F sur tout l'espace $\mathcal{B}^2(H)$. Pour établir l'existence d'une solution p.p. faible de l'équation (8.8), il suffit de montrer que l'opérateur somme $L+F$ de domaine $D(L) \cap D(F)$ est surjectif. Pour cela, nous établissons que les deux opérateurs L et F sont maximaux monotones lorsque que le champ de vecteurs f de l'équation est monotone ; ensuite que l'opérateur somme $L+F$ est aussi maximal monotone. Pour obtenir la surjectivité de l'opérateur $L+F$, nous avons choisie l'hypothèse suivante.

(H6) Il existe $a > 0$ et $b \geq 0$ tels que

$$\forall x \in H, \qquad \ll f(x) \mid x \gg \geq a\|x\|^2 - b.$$

La principale difficulté a été de démontrer que l'opérateur somme $L+F$ est maximal monotone. Le résultat obtenu est le suivant :

Théorème 8.11 (Theorem 2.1, [23]). *Supposons que* **(H6)** *soit vérifiée et que f soit monotone. Si $e \in \mathcal{B}^2(H)$, alors*

i) l'équation (8.8) *admet au moins une solution p.p. faible,*

ii) si x et y sont deux solutions p.p. faibles de l'équation (8.8), *alors leur différence est une fonction constante.*

iii) Si de plus l'application f est strictement monotone, alors l'équation (8.8) *admet une unique solution p.p. faible.*

Pour approcher les solutions p.p. faibles par des solutions p.p. fortes, nous avons besoin d'un résultat d'existence et d'unicité de la solution p.p. faible, que l'on déduit du théorème précédent.

(H7) f est fortement monotone : il existe $c_* > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \Omega, \qquad \ll f(x) - f(y) \mid x - y \gg \geq c_* \|x - y\|^2 .$$

Corollaire 8.12 (Corollary 2.2, [23]). *Supposons que* **(H7)** *soit vérifiée. Si $e \in \mathcal{B}^2(H)$, alors l'équation* (8.8) *admet une unique solution p.p. faible.*

Dans le cas de l'existence et de l'unicité de la solution p.p. faible, en utilisant l'approximation de Yosida [61, 129] de l'opérateur maximal monotone F, il est possible d'approcher cette solution par des solutions fortes d'une famille d'équations perturbées, dans le sens suivant :

Théorème 8.13 (Theorem 3.6, [23]). *Supposons que* **(H7)** *soit vérifiée. Si $e \in AP(H)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une application continue $f^\varepsilon : H \longrightarrow H$ $(\varepsilon > 0)$ telle que*

$$\forall x \in H, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} f^\varepsilon(x) = f(x)$$

et l'équation

$$x''(t) = f^\varepsilon(x(t)) + e(t)$$

admet une unique solution p.p. forte x_ε telle que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |x_\varepsilon - x|_{\mathcal{B}^2} = 0, \tag{8.9}$$

où x désigne l'unique solution p.p. faible de l'équation (8.8).

Remarque 8.14. *La relation* (8.9) *signifie que les coefficients de Fourier-Bohr des solutions x_ε sont proches de ceux de x pour ε proche de zéro.*

9. Équation scalaire de Liénard

Dans ce paragraphe, nous décrivons les principaux résultats des articles [7, 10]. Dans [7], nous étudions le comportement asymptotique des solutions bornées sur $(t_0, +\infty)$ et l'existence d'une solution p.p. de l'équation de Liénard presque-périodique

$$x''(t) + f(x(t))x'(t) + g(x(t)) = e(t), \tag{9.1}$$

où $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction p.p., f et $g : (a, b) \to \mathbb{R}$, $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ sont deux fonctions. Puis dans [10] (écrit en collaboration avec E. Ait Dads et L. Lhachimi), nous prolongeons ces résultats pour des solutions pseudo p.p. qui sont des généralisations de solutions p.p.. Ces résultats sont aussi prolongés pour les solutions presque-automorphes dans [12] que nous présenterons dans la partie 3 (théorème 14.13, p. 60). Dans tout ce paragraphe, nous supposons que les fonctions f et g vérifient les hypothèses suivantes :

(H1) f et g sont localement lipschitziennes sur (a, b).

(H2) g est strictement décroissante sur (a, b).

(H3) $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in (a, b)$.

Notre étude inclut le cas où la force de rappel $g(x)$ présente une singularité en un point et devient infini en ce point, par exemple $g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ avec $\alpha > 0$ et $(a, b) = (0, +\infty)$.

Dans le cas périodique, Martínez-Amores et Torres dans [105], puis Campos et Torres dans [63] ont établi des résultats sur le comportement asymptotique des solutions bornées sur $(t_0, +\infty)$ et sur l'existence d'une solution périodique pour la même équation. Plus précisément, sous les hypothèses **(H1)-(H3)** et lorsque le second membre e est T-périodique, Campos et Torres ont montré que l'existence d'une solution bornée sur $(t_0, +\infty)$ implique l'existence d'une unique solution T-périodique ; et que toutes les solutions bornées sur $(t_0, +\infty)$ sont asymptotiquement T-périodique. Ensuite, ils décrivent l'ensemble des conditions initiales de ces dernières solutions (Theorem 3.2, Proposition 4.1, [63]). Nous avons étendu ces résultats au cas p.p. en utilisant les mêmes hypothèses : **(H1)-(H3)**.

Nous dirons qu'une solution de l'équation (9.1) est *bornée sur* $\mathbb{R}$ s'il existe un compact $K \subset (a, b)$ tel que $x(t) \in K$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et qu'une solution est *bornée sur le futur* s'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ et un compact $K \subset (a, b)$ tel que $x(t) \in K$, pour tout $t \geq t_0$.

Théorème 9.1 (Theorem 2.1, [7])**.** *Supposons que le second membre e soit p.p..*

i) Si l'équation (9.1) *admet au moins une solution bornée sur le futur, alors cette équation admet une unique solution ϕ bornée sur $\mathbb{R}$ qui est p.p. et vérifie $mod(\phi) \subset mod(e)$.*

ii) Chaque solution x bornée sur le futur est asymptotiquement p.p. au sens suivant :

$$\lim_{t \to +\infty} |x(t) - \phi(t)| + |x'(t) - \phi'(t)| = 0. \tag{9.2}$$

Si le second membre e est T-périodique, alors la formule des modules, $mod(\phi) \subset mod(e)$, permet d'affirmer que la solution p.p. est T-périodique, donc ce dernier théorème est une généralisation du (Theorem 3.2, [63]) de Campos et Torres.

Soit $(x_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$. Notons par $t \mapsto x(t; t_0, x_0, v_0)$ la solution maximale de l'équation (9.1) avec les conditions initiales $x(t_0; t_0, x_0, v_0) = x_0$ et $x'(t_0; t_0, x_0, v_0) = v_0$. Rappelons que *l'opérateur de Poincaré* associé à l'équation (9.1) est l'application $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$P(x, v) = (x(t_0 + T; t_0, x, v), x'(t_0 + T; t_0, x, v));$$

et que les solutions T-périodiques sont les points fixes de cet opérateur de Poincaré.

Pour démontrer ce dernier théorème dans le cas T-périodique, les auteurs de [63] utilisent la méthode des *sous- et sur-solutions* et des méthodes topologiques appliquées à l'opérateur de Poincaré P. Dans le cas p.p., la méthode des sous- et sur-solutions n'est pas directement exploitable et l'opérateur de Poincaré est inutilisable. Dans [115], Ortega et Tarallo ont construit des classes d'équations différentielles sans solution p.p., mais possédant des sous- et sur-solutions. Le lemme suivant joue un rôle clé pour démontrer le théorème 9.1.

Lemme 9.2 (Proposition 2.3, [10])**.** *Supposons que le second membre e soit continu et borné sur* $\mathbb{R}$.

i) Si x et y sont 2 solutions distinctes bornées sur le futur alors

$$\forall t \geq t_0, \qquad (x(t) - y(t))\,(x'(t) - y'(t)) < 0 \tag{9.3}$$

et

$$\lim_{t \to +\infty} |x(t) - y(t)| = 0.$$

ii) L'équation (9.1) *admet au plus une solution bornée sur* $\mathbb{R}$*.*

Remarque 9.3. *L'inégalité* (9.3) *montre que $x(t) \neq y(t)$ pour tout $t \geq t_0$ et que la fonction $t \mapsto |x(t) - y(t)|$ est strictement décroissante.*

Le lemme 9.2 a été d'abord démontré dans [7] lorsque le second membre est p.p. en utilisant la fonction

$$r(t) = x'(t) - y'(t) + \int_{y(t)}^{x(t)} f(z)\,dz \tag{9.4}$$

où x et y sont deux solutions bornées sur le futur et le principe de reconstruction d'une fonction p.p. (cf. la proposition 7.6, p. 31) appliquée à la fonction r. En fait on établit que la fonction r est monotone et que si elle est constante alors les deux solutions x et y sont égales. Ensuite le lemme 9.2 a été établit dans [10], lorsque le second membre de l'équation est seulement continu et borné, pour pouvoir traiter le cas pseudo p.p. (cf. la définition 5.1, p. 23). Pour les fonctions pseudo p.p. il n'existe pas l'analogue du principe de reconstruction des fonctions p.p.. Pour le cas continu et borné, nous avons utilisé la même fonction (9.4) et exploité les propriétés de monotonie et d'uniforme continuité de la dérivée de cette fonction.

Le théorème 9.1 est une conséquence du lemme 9.2. En effet, si le second membre e est p.p., alors l'existence d'une solution bornée sur le futur implique l'existence d'une solution bornée sur $\mathbb{R}$ (cf. le théorème 7.1, p. 29) ; qui est unique d'après le lemme 9.2. L'existence de la solution p.p. résulte de l'existence et l'unicité de la solution bornée sur $\mathbb{R}$ de toutes les équations associés à (9.1) où le second membre $e_* \in H(e)$ (cf. le théorème 7.8, p. 31).

Le second résultat principal de Campos et Torres (Proposition 4.1, [63]) est la description de l'ensemble des conditions initiales des solutions bornées sur le futur. Ils ont montré que cet ensemble de $\mathbb{R}^2$ est le graphe d'une fonction décroissante (au sens large), sauf si la fonction f est strictement positive. Nous étendons ce résultat au cas p.p. en montrant que ce graphe est strictement décroissant dans tous les cas.

Pour $t_0 \in \mathbb{R}$, notons par W_{t_0}, l'ensemble des conditions initiales des solutions qui sont définies sur $[t_0, +\infty)$ et bornées sur le futur, c'est-à-dire

$$W_{t_0} = \{(x_0, y_0) \in (a, b) \times \mathbb{R}\,;\, t \mapsto x(t; t_0, x_0, v_0) \text{ est bornée sur le futur}\}\,.$$

Théorème 9.4 (Theorem 2.5, [10])**.** *Supposons que le second membre e soit continu et borné sur* $\mathbb{R}$*. Si l'équation* (9.1) *admet au moins une solution bornée sur le futur, alors il existe un intervalle I ouvert non vide de (a, b) et une fonction $\xi : I \to \mathbb{R}$ continue et strictement décroissante telle que*

$$W_{t_0} = \{(x, \xi(x))\,;\, x \in I\}\,.$$

Remarque 9.5. *Le Theorem 9.4 a été d'abord démontré dans* [7] *lorsque le second membre est p.p., puis dans* [10] *lorsque le second membre est seulement continu et borné.*

Si l'on admet l'existence d'une solution bornée sur le futur de l'équation (9.1), alors il existe une unique solution p.p. (théorème 9.1). En corollaire du théorème 9.9 décrit ci-dessous, nous obtenons le résultat suivant d'existence d'une solution p.p. :

Corollaire 9.6. *Supposons que le second membre e soit p.p.. Si* $\inf_{t\in\mathbb{R}} e(t)$ *et* $\sup_{t\in\mathbb{R}} e(t)$ *appartiennent à l'image de g :* $g((a,b))$*, alors l'équation* (9.1) *admet une unique solution* ϕ *bornée sur* $\mathbb{R}$ *qui est p.p. et vérifie* $mod(\phi) \subset mod(e)$.

Pour terminer sur les solutions p.p., nous illustrons nos résultats par un exemple :

Exemple 9.7. *Si* e *est une fonction p.p. vérifiant* $\inf_{t\in\mathbb{R}} e(t) > 0$*, alors l'équation*

$$x''(t) + |x(t)|\, x'(t) + \frac{1}{x^{\alpha}(t)} = e(t) \quad (\alpha > 0)$$

vérifie toutes les conclusions des théorèmes 9.1, 9.4 et du corollaire 9.6, c'est-à-dire que cette dernière équation admet une unique solution ϕ *bornée sur* $\mathbb{R}$ *qui est p.p. et vérifie* $mod(\phi) \subset mod(e)$*. De plus toutes les solutions bornées sur le futur sont asymptotiquement p.p. au sens de* (9.2) *; et l'ensemble de leurs conditions initiales est le graphe d'une fonction strictement décroissante.*

Maintenant, nous présentons les résultats dans le cas où le second membre e est pseudo p.p. (cf. la définition 5.1 et la remarque 5.2, p. 23).

L'ensemble des conditions initiales des solutions bornées sur le futur est le graphe d'une fonction strictement décroissante (cf. le théorème 9.4), puisqu'une fonction pseudo p.p. est continue et bornée.

Le théorème 9.1 peut-il se généraliser lorsque le second membre e est pseudo p.p. ? La réponse est oui dans le cas particulier où le second membre e est asymptotiquement p.p..

Théorème 9.8 (Theorem 3.2, [10])**.** *Supposons que le second membre e soit asymptotiquement p.p. :* $e = e_1 + e_2$ *avec* $e_1 \in AP(\mathbb{R})$ *et* $e_2 \in C([t_0, +\infty), \mathbb{R})$ *vérifiant* $\lim_{t\to+\infty} e_2(t) = 0$.

i) Si l'équation (9.1) *admet au moins une solution bornée sur le futur, alors l'équation p.p. associée à* (9.1) *:*

$$x''(t) + f(x(t))x'(t) + g(x(t)) = e_1(t) \tag{9.5}$$

admet une unique solution ϕ *bornée sur* $\mathbb{R}$ *qui est p.p. et vérifie* $mod(\phi) \subset mod(e_1)$.

ii) Chaque solution x *bornée sur le futur de l'équation* (9.1) *est asymptotiquement p.p. au sens de* (9.2).

Ce dernier résultat provient du fait que si on applique le principe de reconstruction sur la composante p.p. e_1 du second membre $e = e_1 + e_2$ asymtotiquement p.p., alors il existe une suite numérique $(t_n)_n$ vérifiant :

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} e_1(t + t_n) = e_1(t).$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} e_2(t + t_n) = 0$, on obtient $\lim_{n\to+\infty} e(t + t_n) = e_1(t)$; et en appliquant le théorème d'Ascoli sur la solution x bornée sur le futur, on en déduit $\lim_{n\to+\infty} x(t+t_n) = \phi(t)$ où ϕ est une solution bornée sur $\mathbb{R}$ de l'équation p.p. (9.5). Lorsque le second membre est pseudo p.p., nous ne pouvons pas obtenir un résultat similaire au théorème 9.8.

À ce problème, nous donnons deux réponses, la première est de restreindre la classe des second membres de l'équation pseudo p.p.. Notons par $\mathcal{E}(0,+\infty)$ l'ensemble des fonctions continues et bornées $x : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty} \int_n^{n+1} |x_2(t)|\ dt = 0. \tag{9.6}$$

Remarquons que si $e \in \mathcal{E}(0,+\infty)$, alors e est pseudo p.p. sur $(0,+\infty)$, c'est-à-dire $\lim\limits_{r\to+\infty} \dfrac{1}{r}\displaystyle\int_0^r |x_2(t)|\ dt = 0$, puisque $\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^n |x_2(t)|\ dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la somme de Cesàro de la suite $\left(\displaystyle\int_n^{n+1} |x_2(t)|\ dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (Proposition 3.1, [10]). Le théorème 9.8 a été généralisé pour les seconds membres qui s'écrivent sous la forme $e = e_1 + e_2$ où e_1 est p.p. et x_2 vérifie (9.6) (Theorem 3.2, [10]).

La seconde réponse est un théorème d'existence lorsque le second membre e est pseudo p.p..

Théorème 9.9 (Theorem 4.3, [10])**.** *Supposons que le second membre e soit pseudo p.p.. Si $\inf\limits_{t\in\mathbb{R}} e(t)$ et $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} e(t)$ appartiennent à l'image de g : $g((a,b))$, alors l'équation* (9.1) *admet une unique solution ϕ bornée sur $\mathbb{R}$ qui est pseudo p.p.. De plus la composante p.p. ϕ_1 de ϕ est l'unique solution de l'équation p.p.* (9.5) *où e_1 est la composante p.p. du second membre e qui vérifie $mod(\phi_1) \subset mod(e_1)$.*

En utilisant un théorème d'existence d'une solution bornée d'Opial (Théorème 2, [111]) appliquée à l'équation (9.1) (resp. (9.5)), on obtient l'existence d'une solution x bornée sur $\mathbb{R}$ (resp. x_1 p.p.) de (9.1) (resp. (9.5)) ; puis par une démonstration assez technique, on montre que la différence $x_2 := x - x_1$ est ergodique, c'est-à-dire $\lim\limits_{r\to+\infty} \dfrac{1}{2r}\displaystyle\int_{-r}^{r} |x_2(t)|\ dt = 0$.

10. Équation vectorielle de Liénard

Dans [8], nous étudions l'ensemble des solutions bornées ou p.p. d'une équation vectorielle de Liénard, puis nous établissons un théorème d'existence et d'unicité d'une solution p.p.. L'équation de Liénard considérée est la suivante :

$$x''(t) + \frac{d}{dt}\left[\nabla F(x(t))\right] + Cx(t) = e(t), \tag{10.1}$$

où $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ est une fonction continue, $C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est une application de classe C^2 où ∇F désigne le gradient de F. Dans tout ce paragraphe, nous supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(H1) F est convexe.

(H2) $C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ est symétrique et inversible.

(H3) e est p.p..

Remarque 10.1. *Il n'y a aucune condition de signe sur les valeurs propres de C.*

Soit x et y deux solutions définies et bornées sur $\mathbb{R}$ de l'équation (10.1). La fonction suivante joue un rôle essentiel dans notre étude :

$$r(t) = \frac{1}{2}\|h(t)\|^2 + \frac{1}{2} \ll C^{-1}(h'(t)+k(t)) \mid h'(t)+k(t) \gg \tag{10.2}$$

où

$$h(t) = x(t) - y(t) \quad \text{et} \quad k(t) = \nabla F(x(t)) - \nabla F(y(t)).$$

Cette fonction r est dérivable et

$$r'(t) = - \ll \nabla F(x(t)) - \nabla F(y(t)) \mid x(t) - y(t) \gg .$$

De l'hypothèse **(H1)**, nous obtenons que la fonction r est décroissante. Nous en déduisons aussi que si r est constante, alors $\nabla F(x(t)) = \nabla F(y(t))$ et $h''(t) + Ch(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc que l'ensemble des solutions de (10.1) est convexe (Lemma 3.3, [8]). Une étude plus fine de la fonction r permet de montrer que : $r(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad r(t) = 0 \implies \forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = y(t),$$

bien que la matrice C ne soit pas supposée définie positive (cf. Lemma 3.4, [8]). La fonction r vérifie donc les conditions **(C3)-(C5)** de la page 33. Le premier résultat porte sur l'étude des solutions bornées de l'équation de Liénard (10.1).

Théorème 10.2 (Theorem 2.1, [8])**.** *i) Si l'équation* (10.1) *admet au moins une solution bornée sur* $[0, +\infty)$*, alors cette équation admet au moins une solution p.p.* x *qui vérifie* $mod(x) \subset mod(e)$*.*

ii) Toutes les solutions bornées sur $\mathbb{R}$ *sont p.p..*

iii) L'ensemble des solutions bornées (ou p.p.) est convexe ; plus précisément si x_0 *est une solution bornée sur* $\mathbb{R}$*, alors* x *est une solution bornée sur* $\mathbb{R}$ *si et seulement*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad (x(t) - x_0(t))'' + C(x(t) - x_0(t)) = 0 \quad \text{et} \quad \nabla F(x(t)) = \nabla F(x_0(t)).$$

Pour obtenir ce dernier résultat, nous utilisons la méthode de la *fonctionnelle sous-variante* de Fink (cf. le théorème 7.10, p. 32). Pour cela, considérons le système différentiel suivant équivalent à l'équation de Liénard (10.1) :

$$X'(t) = f(t, X(t)) \text{ avec } X = [X_1, X_2] \text{ et } f(t, X) = [X_2, e(t) - \nabla^2 F(X_1)X_2 - CX_1] \tag{10.3}$$

et la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ par

$$Q(X) = \frac{1}{2}\|X_1\|^2 + \frac{1}{2} \ll C^{-1}X_2 \mid X_2 \gg .$$

Pour appliquer le théorème 7.10, p. 32, nous utilisons la fonctionnelle sous-variante

$$\lambda(X) = \sup_{t \in \mathbb{R}} Q(X(t)).$$

Le lien entre la fonction r et la forme quadratique Q est le suivant : si X et Y sont deux solutions du système (10.3), alors $Q(X(t) - Y(t)) = \frac{1}{2}\|h(t)\|^2 + \frac{1}{2} \ll C^{-1}h'(t) \mid h'(t) \gg$ avec $h(t) = X_1(t) - Y_1(t)$, et dans le cas où r est constante, $r(t) = Q(X(t) - Y(t))$.

Du théorème 10.2, nous obtenons un résultat d'unicité de la solution bornée.

Corollaire 10.3 (Corollary 2.2, [8])**.** *Si la matrice* C *est définie négative ou si l'application* F *est strictement convexe, alors l'équation* (10.1) *admet au plus une solution bornée sur* $\mathbb{R}$ *(ou p.p.).*

Toujours à l'aide de la fonction r, nous obtenons le résultat suivant sur le comportement asymptotique des solutions bornées sur $[0,+\infty)$.

Théorème 10.4 (Theorem 2.3, [8]). *Toute solution x qui est bornée sur $[0,+\infty)$ est asymptotiquement p.p., c'est-à-dire qu'il existe une solution x_* p.p. telle que*

$$\lim_{t\to+\infty} \|x(t)-x_*(t)\| + \|x'(t)-x'_*(t)\| = 0.$$

Remarque 10.5. *Dans le cas particulier où l'opérateur C est défini positif, des résultats similaires aux théorèmes 10.2 et 10.4 ont été établis par Haraux pour une équation d'évolution de type Liénard (Theorem 5.4, 6.2, [89]).*

Nous formulons les hypothèses suivantes pour obtenir un résultat d'existence et d'unicité.

(H4) Il existe $c_* > 0$ telle que l'application ∇F soit fortement monotone de module c_*, c'est-à-dire :

$$\ll \nabla F(x) - \nabla F(y) \mid x-y \gg \geq c_* \|x-y\|^2 .$$

(H5) Il existe $k_* > 0$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application ∇F est k_*-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^N$.

Le résultat d'existence et d'unicité d'une solution p.p. est :

Théorème 10.6 (Theorem 2.4, [8]). *Si en plus des hypothèses du théorème 10.2, nous supposons que les hypothèses* **(H4)-(H5)** *sont vérifiées, alors il existe une unique solution x p.p.. Cette solution vérifie $mod(x) \subset mod(e)$.*

Pour établir ce résultat d'existence et d'unicité d'une solution p.p., nous commençons par construire une solution bornée. L'existence et l'unicité de la solution p.p. est une conséquence du théorème 10.2 et du corollaire 10.3. Pour construire cette solution bornée, nous utilisons la méthode des *fonctions directrices* développée par Krasnosel'skii [97, 98], Krasnosel'skii et Perov [99, 100], Krasnosel'skii et Strygin [101]. Pour un système différentiel

$$X'(t) = f(t, X(t)) \tag{10.4}$$

avec $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}^{2N}$ une fonction continue, V est une *fonction directrice régulière* de (10.4), si $V \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$, il existe $R > 0$, $\alpha > 0$ et $W \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$ tels que :

$$\lim_{\|X\|\to+\infty} |W(X)| = +\infty$$

et pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\|X\| \geq R$

$$\ll \nabla V(X) \mid f(t,X) \gg > \alpha \|\nabla V(X)\| \|f(t,X)\| \text{ et } \|\nabla V(X)\| > \|\nabla W(X)\| .$$

Formulons le résultat suivant que l'on peut trouver dans le livre de Krasnosel'skii et Zabreiko (Theorem 13.6, p. 56, [102]) :

Théorème 10.7. *Si le système* (10.4) *admet une fonction directrice régulière V et si l'indice topologique de V est différent de zéro, alors* (10.4) *admet au moins une solution bornée sur $\mathbb{R}$.*

On obtient une solution bornée sur $\mathbb{R}$ du système (10.3) en appliquant le théorème 10.7 avec $V(X) = V_1(X) + V_2(X)$, où

$$V_1(X) = -\frac{1}{2}\left(\|X_1\|^2 + \ll C^{-1}(X_2 + \nabla F(X_1)) \mid X_2 + \nabla F(X_1) \gg\right)$$

$$V_2(X) = -\frac{1}{2}\left(\ll CX_1 \mid X_1 \gg + \|X_2\|^2\right).$$

La fonction directrice V_1 correspond à la fonction r, mais elle ne permet pas de contrôler la dérivée $X_1' = X_2$, dans le sens suivant :

$$\ll \nabla V_1(X) \mid f(t,X) \gg_{\mathbb{R}^{2N}} \geq c_* \|X_1\|^2 - \alpha_1 \|X_1\| - \alpha_2 \|X_2\| - \alpha_3$$

avec $c_* > 0$ la constante définie dans l'hypothèse **(H4)** et $\alpha_1, \cdots, \alpha_3 \geq 0$; ainsi V_1 n'est pas une une fonction directrice régulière. Pour obtenir une fonction directrice régulière, nous avons rajouté le terme V_2 avec laquelle, on obtient

$$\ll \nabla V_2(X) \mid f(t,X) \gg_{\mathbb{R}^{2N}} \geq c_* \|X_2\|^2 - \beta \|X_2\|$$

avec $\beta \geq 0$. En fait la fonction directrice régulière choisie est $V_\varepsilon(X) = \varepsilon V_1(X) + V_2(X)$ avec $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, pour pouvoir calculer simplement l'indice topologique de V_ε.

Remarque 10.8. *Tous les résultats de ce paragraphe (les théorèmes 10.2, 10.4 et le corollaire 10.3) peuvent s'étendre au cas de la dimension infinie, c'est-à-dire lorsque $\mathbb{R}^N$ est remplacé par un espace de Hilbert général, sauf celui qui concerne l'existence d'une solution bornée (théorème 10.6), car il est obtenu en utilisant la méthode des fonctions directrices. Pour un espace de Hilbert général H, les énoncés des théorèmes 10.2, 10.4 et du corollaire 10.3 restent valides si l'on remplace l'expression "solution bornée" par "solution à image relativement compacte".*

11. Équation du second ordre : $x'' = f(t,x,x')$

Dans [6], nous étudions l'ensemble des solutions p.p. de l'équation du second ordre

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)) \tag{11.1}$$

où Ω est une partie ouverte et convexe de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ et $f : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^N$ est une fonction continue, puis nous établissons un résultat d'existence d'une solution p.p.. Le premier résultat de [6] (théorème 11.2 décrit ci-dessous) généralise et améliore un résultat d'Opial (Theorem III, [112]) et de Fink (Theorem 3, Corollary 4, [83]). Pour une équation vectorielle de Duffing, le second résultat de [6] (théorème 11.6 décrit ci-dessous) est une généralisation d'un résultat d'existence d'une solution bornée de Mawhin (Theorem 3.1, [108]) et d'un résultat d'existence et d'unicité de la solution p.p. de Blot et al. (Theorem 1, [2]). Commençons par citer le résultat d'Opial qui est un résultat sur les solutions p.p. de l'équation (11.1) dans le cas scalaire : $N = 1$.

Théorème 11.1 (Opial, Theorem III, [112])**.** *Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons les conditions suivantes vérifiées.*

C1) *f est p.p. en t uniformément par rapport à $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,*

C2) *il existe $k_* > 0$, tel que pour tous $t \in \mathbb{R}$, $(x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2$ et $(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$, on ait*

$$|f(t,x_1,y_1) - f(t,x_2,y_2)| \leq k_* \left(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|\right),$$

C3) *pour tous* $t \in \mathbb{R}$ *et* $y \in \mathbb{R}$*, l'application partielle* $x \to f(t,x,y)$ *est croissante (au sens large).*

i) Si l'équation (11.1) *admet au moins une solution* x_0 *telle que* x_0 *et* x_0' *soient bornées sur* $\mathbb{R}$*, alors cette équation admet au moins une solution p.p..*

ii) Si x *et* y *sont deux solutions p.p. de* (11.1)*, alors leur différence est une fonction constante.*

iii) Si de plus pour tous $t \in \mathbb{R}$ *et* $y \in \mathbb{R}$*, l'application partielle* $x \to f(t,x,y)$ *est strictement croissante, alors l'équation* (11.1) *admet au plus une solution p.p..*

Pour généraliser ce dernier résultat au cas vectoriel, nous utilisons les hypothèses suivantes, pour une application $f : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^N$ où Ω est une partie ouverte et convexe de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

(H1) f est p.p. en t uniformément par rapport à $(x,y) \in \Omega$.

(H2) Pour tout compact K de Ω, il existe $k_* > 0$, tels que pour tous $t \in \mathbb{R}$, $(x,y_1) \in K$ et $(x,y_2) \in K$, on ait

$$\|f(t,x,y_1) - f(t,x,y_2)\| \leq k_* \|y_1 - y_2\|.$$

(H3) Pour tous $(x_1,y_1) \in \Omega$ et $(x_2,y_2) \in \Omega$ vérifiant $\ll x_1 - x_2 \mid y_1 - y_2 \gg = 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\ll f(t,x_1,y_1) - f(t,x_2,y_2) \mid x_1 - x_2 \gg + \|y_1 - y_2\|^2 \geq 0.$$

Pour obtenir l'unicité d'une solution p.p., nous avons besoin de l'hypothèse suivante :

(H4) Il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tous $(x_1,y_1) \in \Omega$ et $(x_2,y_2) \in \Omega$ vérifiant $x_1 \neq x_2$ et $\ll x_1 - x_2 \mid y_1 - y_2 \gg = 0$, on ait

$$\ll f(t_0,x_1,y_1) - f(t_0,x_2,y_2) \mid x_1 - x_2 \gg + \|y_1 - y_2\|^2 > 0.$$

Théorème 11.2 (Theorem 2.1, [6])**.** *Supposons que les hypothèses* **(H1)-(H3)** *soient vérifiées.*

i) Si l'équation (11.1) *admet au moins une solution* x_0 *bornée sur* $[0,+\infty)$*, dans le sens suivant, l'adhérence de* $\{(x_0(t), x_0'(t))\,;\, t \geq 0\}$ *est un compact de* Ω*, alors cette équation admet au moins une solution p.p.* x *qui vérifie* $mod(x) \subset mod(f)$*.*

ii) Si x *et* y *sont deux solutions p.p. de* (11.1)*, alors la fonction* $t \to \|x(t) - y(t)\|$ *est constante.*

iii) L'ensemble des solutions p.p. de l'équation (11.1) *est convexe.*

iv) Si de plus l'hypothèse **(H4)** *est vérifiée, alors la solution p.p. est unique.*

Remarque 11.3. *Dans le cas scalaire,* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*,*

1- l'hypothèse **(H3)** *est équivalente à* **(C3)***,*

2- l'hypothèse **(H4)** *est équivalente à l'existence de* $t_0 \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $y \in \mathbb{R}$*, l'application partielle* $x \to f(t_0,x,y)$ *est strictement croissante, ce qui est une hypothèse plus faible que celle du théorème 11.1 sur l'unicité de la solution p.p.,*

3- le théorème 11.2 généralise au cas vectoriel le résultat d'Opial (théorème 11.1) et l'améliore dans le cas scalaire, puisque l'hypothèse **(H2)** *est plus faible que* **(C2)** *et* **(H4)** *est plus faible que celle du résultat d'Opial sur l'unicité de la solution p.p..*

Pour illustrer les hypothèses **(H1)-(H4)**, nous donnons un corollaire de ce dernier résultat pour l'équation

$$x''(t) = g(t, x(t)) + a(t)x'(t), \tag{11.2}$$

où U est une partie ouverte et convexe de $\mathbb{R}^N$, $g : \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}^N$ et $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des applications continues. Avec $f(t, x, y) = g(t, x) + a(t)y$, l'hypothèse **(H1)** est vérifiée dès que a est p.p. et g est p.p. en t uniformément par rapport à $x \in U$. Remarquons que l'hypothèse **(H2)** est toujours vérifiée dès que la fonction a est bornée, ce qui n'est pas le cas avec l'hypothèse **(C2)** du résultat d'Opial (théorème 11.1). L'hypothèse **(H3)** est équivalente à

$$\forall x_1, x_2 \in U, \qquad \ll g(t, x_1) - g(t, x_2) \mid x_1 - x_2 \gg \geq 0 \tag{11.3}$$

et l'hypothèse **(H4)** est équivalente à

$$\exists t_0 \in \mathbb{R}, \forall x_1, x_2 \in U, x_1 \neq x_2, \qquad \ll g(t_0, x_1) - g(t_0, x_2) \mid x_1 - x_2 \gg > 0. \tag{11.4}$$

Corollaire 11.4. *Supposons que a est p.p., g est p.p. en t uniformément par rapport à $x \in U$ et que g vérifie* (11.3). *Alors l'équation* (11.2) *vérifie les conclusions i)-iii) du théorème 11.2. Si de plus, g vérifie* (11.4)*, alors la solution p.p. est unique.*

A la fin de ce paragraphe nous donnerons une autre application du théorème 11.2.

Pour démontrer le théorème 11.2, nous définissons un *principe du maximum* **(MP)** pour l'équation (11.1).

(MP) Si x et y sont deux solutions de (11.1) définies sur $\mathbb{R}$, alors, $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$,

$$\max\{\|x(t) - y(t)\| \; ; \, t_1 \leq t \leq t_2\} = \max\{\|x(t_1) - y(t_1)\|, \|x(t_2) - v(t_2)\|\}.$$

Nous allons expliquer brièvement que si l'équation (11.1) vérifie le principe du maximum **(MP)**, alors les conclusions i) et ii) du théorème 11.2 sont vérifiées. Pour cela, notons par r l'application définie par

$$r(t) = \frac{1}{2}\|x(t) - y(t)\|^2, \text{ pour } t \in \mathbb{R}, \tag{11.5}$$

où x et y sont deux solutions de (11.1) définies sur $\mathbb{R}$. Remarquons que si l'équation (11.1) satisfait le principe du maximum **(MP)**, la fonction r vérifie :

$$\max\{r(\theta t_1 + (1-\theta)t_2) \, ; \, 0 \leq \theta \leq 1\} = \max\{r(t_1), r(t_2)\},$$

ce qui est la définition d'une fonction quasi-convexe. Par conséquent la fonction r est monotone sur $\mathbb{R}$, ou il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que r soit décroissante sur $(-\infty, t_0]$ et croissante sur $[t_0, +\infty)$. Dans tous les cas,

$$\exists t_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } r \text{ soit décroissante sur } (-\infty, t_0] \text{ ou croissante sur } [t_0, +\infty), \tag{11.6}$$

donc

$$\lim_{t \to -\infty} r(t) = \sup_{t \in \mathbb{R}} r(t) \quad \text{ou} \quad \lim_{t \to +\infty} r(t) = \sup_{t \in \mathbb{R}} r(t). \tag{11.7}$$

La conclusion ii) résulte de la monotonie sur un intervalle infini et de la presque-périodicité de la fonction r. Les propriétés (11.6) et (11.7) vérifiées par la fonction r permettent d'appliquer la méthode de la *fonctionnelle sous-variante* de Fink (cf. le théorème 7.10, p. 32) pour obtenir l'existence d'une solution p.p. dans la conclusion i). Pour cela, nous considérons l'équation différentielle du premier ordre suivante équivalente à l'équation (11.1) :

$$X'(t) = F(t, X(t)) \text{ avec } X = [X_1, X_2] \text{ et } F(t, X) = [X_2, f(t, X_1, X_2)] \tag{11.8}$$

et la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ par

$$Q(X) = \frac{1}{2} \|X_1\|^2 .$$

Pour obtenir l'existence d'une solution p.p. du système (11.8), nous utilisons le théorème 7.10, p. 32 avec la fonctionnelle sous-variante $\lambda(X) = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} Q(X(t))$. Le lien entre la fonction r et la forme quadratique Q est le suivant : $r(t) = Q(X(t) - Y(t))$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, où X et Y sont deux solutions du système (11.8).

Si l'équation (11.1) vérifie le principe du maximum **(MP)**, alors les conclusions i) et ii) du théorème 11.2 sont vérifiées. Il faut donc donner des hypothèses sur f pour que l'équation (11.1) vérifie le principe du maximum **(MP)**. L'hypothèse **(H3)** est une condition nécessaire pour que le principe du maximum **(MP)** soit vérifié (cf. Remark, p. 924, [6]), mais cette hypothèse n'est pas une condition suffisante. Pour obtenir une condition suffisante, une possibilité est de formuler une hypothèse légèrement plus forte :

(H3-bis) Pour tous $t \in \mathbb{R}$, $(x_1, y_1) \in \Omega$ et $(x_2, y_2) \in \Omega$ vérifiant $\ll x_1-x_2 \mid y_1-y_2 \gg= 0$, on a

$$\ll f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2) \mid x_1 - x_2 \gg + \|y_1 - y_2\|^2 > 0.$$

Pour appliquer simplement la méthode de la *fonctionnelle sous-variante* de Fink (cf. le théorème 7.10, p. 32), il est nécessaire que les hypothèses choisies soient stables sur l'enveloppe de f : $H(f)$ (cf. la définition 7.2, p. 30). Contrairement à l'hypothèse **(H3)**, **(H3-bis)** n'est pas stable pour l'enveloppe de f, puisqu'elle comporte une inégalité stricte. Évidemment, il est possible d'imposer que l'hypothèse que **(H3-bis)** soit satisfaite pour toutes les fonctions $f_* \in H(f)$, c'est ce que Fink a fait dans (Theorem 3, Corollary 4, [83]), en supposant que pour tous $f_* \in H(f)$, l'application partielle $x \to f_*(t, x, y)$ soit strictement croissante. Il n'est pas satisfaisant de faire des hypothèses de ce genre. Pour cette raison, nous avons choisi des hypothèses stables pour l'enveloppe de f, qui sont **(H2)** et **(H3)**, puis nous avons établi que ces deux hypothèses sont des conditions suffisantes pour que l'équation (11.1) vérifie le principe du maximum **(MP)** (Lemma 3.1, Lemma 3.2, [6]). La démonstration de cette condition suffisante est beaucoup plus délicate que celle qui utilise l'hypothèse **(H3-bis)**.

Nous formulons les hypothèses suivantes pour obtenir un résultat d'existence d'une solution p.p., lorsque l'ouvert Ω vérifie la propriété suivante : il existe $R > 0$ tel que $\overline{B}(0, R) \times \mathbb{R}^N \subset \Omega$.

(H5) Pour tous $x \in \mathbb{R}^N$ et $y \in \mathbb{R}^N$ vérifiant $\|x\| = R$ et $\ll x \mid y \gg= 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\ll f(t, x, y) \mid x \gg + \|y\|^2 \geq 0.$$

(H6) Il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $\|x\| \leq R$, pour tous $y \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$, on ait $\|f(t, x, y)\| \leq \alpha \|y\| + \beta$.

Remarque 11.5. *L'hypothèse* **(H5)** *est utilisée dans le livre de Rouche et Mawhin (Théorème 5.3, p. 199,* [126]*) pour établir l'existence d'une solution périodique.*

Le résultat d'existence d'une solution bornée ou p.p. est :

Théorème 11.6 (Theorem 2.3, [6]). *i) Si les hypothèses* **(H5)** *et* **(H6)** *sont vérifiées, alors l'équation* (11.1) *admet au moins une solution* x *bornée sur* $\mathbb{R}$.

ii) Si les hypothèses **(H1)-(H3)**, **(H5)** *et* **(H6)** *sont vérifiées, alors l'équation* (11.1) *admet au moins une solution* x *p.p. vérifiant* $mod(x) \subset mod(f)$. *Si de plus l'hypothèse* **(H4)** *est vérifiée, alors la solution p.p. est unique.*

Ce théorème est obtenu en utilisant le théorème 11.2 et en établissant l'existence d'une solution bornée de l'équation (11.1). Pour établir l'existence d'une solution bornée, nous avons procédé de la même manière que pour l'équation (8.1) de la page 34, en la plongeant dans une famille d'équations périodiques (cf. la remarque 8.2, p. 35).

Remarque 11.7. *Contrairement au théorème 11.6, le théorème 11.2 peut s'étendre au cas de la dimension infinie, c'est-à-dire lorsque* $\mathbb{R}^N$ *est remplacé par un espace de Hilbert général.*

Pour illustrer les hypothèses **(H5)** et **(H6)**, nous donnons un corollaire du théorème 11.6 pour l'équation (11.2). Remarquons que pour $f(t,x,y) = g(t,x) + a(t)y$, l'hypothèse **(H5)** est équivalente à l'existence de $R > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \qquad \|x\| = R \implies \ll g(t,x) \mid x \gg \geq 0 \tag{11.9}$$

et l'hypothèse **(H6)** est équivalente à

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{\|x\|\leq R} \|g(t,x)\| < +\infty. \tag{11.10}$$

Dans le cas où g est p.p. en t uniformément par rapport à $x \in \Omega$, la condition (11.10) est vérifiée.

Corollaire 11.8. *i) Si* g *vérifie* (11.9) *et* (11.10), *alors l'équation* (11.2) *admet au moins une solution* x *bornée sur* $\mathbb{R}$.

ii) Si a *est p.p.,* g *est p.p. en* t *uniformément par rapport à* $x \in U$, g *vérifie* (11.3) *et* (11.9), *alors l'équation* (11.2) *admet au moins une solution* x *p.p. vérifiant* $mod(x) \subset mod(g,a)$. *Si de plus* g *vérifie* (11.4), *alors la solution p.p. est unique.*

Un cas particulier de l'équation différentielle du second ordre (11.1) est l'équation différentielle de Duffing suivante :

$$x''(t) + b(t)x'(t) + B(t)x'(t) = F(t,x(t)) \tag{11.11}$$

où $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $B : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ et $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ sont des fonctions continues. Le théorème 11.6 généralise et améliore un résultat de Mawhin (Theorem 3.1, [108]) et un de Blot, Cieutat et Mawhin (Theorem 1, [2]) pour l'équation différentielle de Duffing (11.11). Ce dernier article est issue de ma thèse de doctorat. Les hypothèses utilisées dans ces deux derniers résultats sont :

(C4) Les applications b et B sont bornées et pour tout compact K de $\mathbb{R}$, on a
$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{x\in K} \|F(t,x)\| < +\infty.$$

(C5) Il existe $R > 0$, tels que pour tous $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$ vérifiant $\|x\| = R$, on a
$$\ll F(t,x) - \frac{1}{4}B(t)B^*(t)x \mid x \gg \geq 0.$$

(C6) F est p.p. en t uniformément par rapport à $x \in \mathbb{R}^N$, b et B sont p.p..

(C7) Il existe $c_* > 0$, tels que pour tous $t \in \mathbb{R}$, x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}^N$, on ait

$$\ll F(t,x_1) - F(t,x_2) - \frac{1}{4}B(t)B^*(t)(x_1 - x_2) \mid x \gg \geq c_* \left\| x_1 - x_2 \right\|^2 .$$

Théorème 11.9 (Mawhin, Theorem 3.1, [108])**.** *i) Si les hypothèses* **(C4)** *et* **(C5)** *sont vérifiées, alors l'équation* (11.11) *admet au moins une solution x bornée sur $\mathbb{R}$.*

Théorème 11.10 (Blot et al., Theorem 1, [2])**.** *i) Si les hypothèses* **(C4)** *et* **(C7)** *sont vérifiées, alors l'équation* (11.11) *admet une unique solution x bornée sur $\mathbb{R}$.*

ii) Si les hypothèses **(C6)** *et* **(C7)** *sont vérifiées, alors l'équation* (11.11) *admet une unique solution x p.p.. De plus la solution x vérifie $mod(x) \subset mod(F) \cup mod(bI + B)$.*

Le théorème 11.9 (resp. 11.10) est une conséquence de l'assertion i) (resp. l'assertion ii)) du théorème 11.6. Le théorème 11.6 améliore ces deux derniers résultats, par exemple si $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est une application continue et bornée,

$$F(t,x) = \left(\frac{2x_1x_2^2 + x_1^3}{4\left\| x \right\|^2} + x_1^7x_2^4, \frac{2x_2x_1^2 + x_2^3}{4\left\| x \right\|^2} \right) + e(t), \text{ si } x \neq 0 \text{ et } F(t,0) = e(t),$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et $b(t) = 0$, alors le théorème 11.9 ne permet pas de conclure, contrairement au théorème 11.6 (cf. Remark, p. 928, [6]). Il en est de même pour le théorème 11.10 avec $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une fonction p.p.,

$$F(t,x) = \left(\left\| x \right\|^2 + \frac{1}{4}\sin^2 t \right) x + e(t),$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

et $b(t) = 0$ (cf. Remark, p. 929, [6]).

12. Équation d'Euler-Lagrange

Dans [4], nous étudions l'ensemble des solutions bornées d'une équation d'Euler-Lagrange convexe et p.p., puis nous établissons un théorème d'existence et d'unicité d'une solution p.p.. Soit $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une application continue telle que l'application partielle $L(t,.,.)$ soit de classe C^1 sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Notons par $\nabla_x L(t,x,y)$ (resp. $\nabla_y L(t,x,y)$) le gradient de $L(t,\cdot,y)$ au point x (resp. $L(t,x,\cdot)$ au point y) et $\nabla_X L(t,X) = (\nabla_x L(t,x,y), \nabla_y L(t,x,y))$ avec $X = [x,y]$. Nous supposons que $\nabla_X L$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Considérons l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\nabla_y L(t,x(t),x'(t)) = \nabla_x L(t,x(t),x'(t)). \tag{12.1}$$

Nous utilisons la notion de *solution forte* pour l'équation d'Euler-Lagrange (12.1), c'est-à-dire que x est une solution de l'équation (12.1), si $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto \nabla_y L(t,x(t),x'(t))$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et x vérifie (12.1) pour tout $t \in \mathbb{R}$. Cette étude est placée dans le cas où le lagrangien L est p.p. et convexe, c'est-à-dire :

(H1) L et $\nabla_X L$ sont p.p. en t uniformément par rapport à $(x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

(H2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application partielle $L(t, \cdot, \cdot)$ est convexe.

Les lagrangiens convexes sont issues de problèmes d'économie théorique. Les équations d'Euler-Lagrange convexes ont été étudiées notamment par Rockafellar [122]-[124], Gaines et Peterson pour les solutions périodiques [87] et par Blot pour les solutions p.p. [48]-[52].

L'équation d'Euler-Lagrange (12.1) n'est pas une équation différentielle sous la forme normale, c'est-à-dire qu'elle ne peut pas en général s'écrire sous la forme : $x' = f(t, x)$; pour cette raison, il a été nécessaire d'adapter certains résultats présentés dans l'introduction de cette partie, p. 29. Il existe bien un système *hamiltonien* associé à l'équation d'Euler-Lagrange qui permet d'obtenir une équation sous la forme normale. Lorsque le lagrangien L est convexe, l'hamiltonien H associé au lagrangien L est la *transformée de Fenchel* de l'application partielle $L(t, x, \cdot)$, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{l} H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ H(t, x, p) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \left(\ll p \mid y \gg_{\mathbb{R}^N} - L(t, x, y) \right). \end{array} \tag{12.2}$$

Dans ce cas, selon Rockafellar [123], l'hamiltonien H est *concave-convexe* et le système hamiltonien est multivoque :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) \in \partial_p H(t, x(t), p(t)) \\ -p'(t) \in \partial_x H(t, x(t), p(t)), \end{array} \right. \tag{12.3}$$

où $\partial_p H(t, x, p)$ (resp. $\partial_x H(t, x, p)$) désigne le *sous-différentiel* de la fonction convexe $H(t, x, \cdot)$ (resp. de la fonction concave $H(t, \cdot, p)$). Les notions de fonctions concave-convexes, ainsi que celles de sous-différentiels, sont développées dans le livre de Rockafellar [122]. Nous n'avons pas utilisé le système multivoque (12.3), car nous voulons obtenir des solutions de classe C^1. En rajoutant des hypothèses, ce que nous avons fait pour obtenir un résultat d'existence et d'unicité d'une solution p.p. (théorème 12.7), on obtient un système hamiltonien univoque :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = \nabla_p H(t, x(t), p(t)) \\ p'(t) = -\nabla_x H(t, x(t), p(t)). \end{array} \right.$$

Ce système hamiltonien peut s'écrire d'une manière plus synthétique

$$X'(t) = J \nabla_X H(t, X(t)) \text{ avec } X = [x, p] \text{ et } JX = [p, -x]. \tag{12.4}$$

Par contre ce système hamiltonien n'est pas nécessairement p.p. ; en effet si le lagrangien L et son gradient $\nabla_X L$ sont p.p. en t uniformément par rapport à $(x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, il n'y a aucune raison pour que le gradient de l'hamiltonien H associé défini par (12.2), le soit aussi. Pour cette raison, nous avons étudié directement l'équation d'Euler-Lagrange sans utiliser le système hamiltonien associé, sauf dans le théorème 12.7 pour construire une solution bornée.

La fonction suivante joue un rôle essentielle dans notre étude :

$$r(t) = \ll \nabla_y L(t, x_1(t), x_1'(t)) - \nabla_y L(t, x_2(t), x_2'(t)) \mid x_1(t) - x_2(t) \gg_{\mathbb{R}^N} \tag{12.5}$$

où x_1 et x_2 sont deux solutions définies sur $\mathbb{R}$ de (12.1). La fonction r est dérivable avec

$$r'(t) = \ll \nabla_X L(t, X_1(t)) - \nabla_X L(t, X_2(t)) \mid X_1(t) - X_2(t) \gg_{\mathbb{R}^{2N}}$$

où $X_1(t) = [x_1(t), x_1'(t)]$ et $X_2(t) = [x_2(t), x_2'(t)]$. Sous l'hypothèse **(H2)**, la fonction r est croissante et si r est constante, alors $\nabla_X L(t, X_1(t)) = \nabla_X L(t, X_2(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Cette fonction r permet notamment d'obtenir le résultat suivant :

Théorème 12.1 (Theorem 3.1, [4]). *Supposons que les hypothèses* **(H1)-(H2)** *soient vérifiées. Si x_1 et x_2 sont deux solutions bornées de* (12.1) *(x_1, x_2, x_1' et $x_2' \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$), alors*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \nabla_X L(t, x_1(t), x_1'(t)) = \nabla_X L(t, x_2(t), x_2'(t)),$$

donc l'ensemble des solutions bornées de (12.1) *est convexe.*

De ce théorème, nous obtenons plusieurs corollaires. Le premier est un résultat d'unicité de la solution bornée.

Corollaire 12.2 (Corollary 3.2, [4]). *Supposons que l'hypothèse* **(H1)** *soit vérifiée. Si l'application $L(t, \cdot, \cdot)$ est strictement convexe, pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors l'équation* (12.1) *admet au plus une solution bornée.*

De la convexité de l'ensemble des solutions bornées, nous obtenons aussi un autre corollaire. Si x est une solution bornée de l'équation d'Euler-Lagrange lorsque $L(\cdot, x, y)$ est T-périodique, alors $x(\cdot + nT)$ est aussi une solution de (12.1) ; donc par convexité de l'ensemble des solutions bornées, $S_n(t) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x(t + kT)$ l'est aussi. En remarquant que

$$\lim_{n \to +\infty} (S_n(t + T) - S_n(t)) = 0,$$

on en déduit l'existence d'une solution T-périodique.

Corollaire 12.3 (Proposition 3.3, [4]). *Supposons que l'hypothèse* **(H2)** *soit vérifiée.*

i) Si le lagrangien $L(\cdot, x, y)$ est T-périodique, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, alors l'existence d'une solution bornée de (12.1) *implique l'existence d'une solution faible x_T qui est T-périodique ; c'est-à-dire $t \mapsto x_T(t)$ et $t \mapsto \nabla_y L(t, x_T(t), x_T'(t))$ sont absolument continues et x_T vérifie l'équation* (12.1) *presque-partout sur $\mathbb{R}$.*

ii) Si le lagrangien L ne dépend pas de t, alors l'existence d'une solution bornée de (12.1) *implique l'existence d'une solution constante de* (12.1).

Remarque 12.4. *Une conséquence de ii) du corollaire 12.3 est le critère suivant : lorsque le lagrangien L est indépendant de t, l'équation* (12.1) *:*

$$\frac{d}{dt} \nabla_y L(x(t), x'(t)) = \nabla_x L(x(t), x'(t))$$

admet au moins une solution bornée si et seulement s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla_x L(x_0, 0) = 0$ (la fonction constante égale à x_0 est une solution).

Une conséquence du théorème 12.1 est le résultat suivant :

Corollaire 12.5 (Proposition 3.4, [4]). *Supposons que les hypothèses* **(H1)-(H2)** *soit vérifiées. Si x est une solution bornée de* (12.1)*, alors*

$$p(t) = \nabla_y L(t, x(t), x'(t))$$

est p.p.. De plus $mod(p) \subset mod(\nabla_X L)$.

Remarque 12.6. *Ce dernier corollaire permet d'affirmer par exemple que toutes les solutions bornées de l'équation $x''(t) = \nabla_x V(t, x(t))$ sont p.p., où $V(t, \cdot)$ est convexe sur $\mathbb{R}^N$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En effet pour cela, il suffit de considérer le lagrangien $L(t, x, y) = \frac{1}{2} |y|^2 + V(t, x)$, et dans ce cas $\nabla_y L(t, x, y) = y$, donc $p(t) = x'(t)$. D'après le corollaire 12.5, x' est p.p., puisque x est bornée et x' est p.p., on en déduit que x est p.p. (cf. VI, p. 6 ,* [39]*).*

Pour obtenir un résultat d'existence et d'unicité d'une solution p.p., nous formulons les hypothèses suivantes :

(H3) Il existe $c_* > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application partielle $L(t, \cdot, \cdot)$ est fortement convexe de module c_*, c'est-à-dire :

$$\forall X_1 \text{ et } X_2 \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \quad \ll \nabla_X L(t, X_1) - \nabla_X L(t, X_2) \mid X_1 - X_2 \gg_{\mathbb{R}^{2N}} \geq c_* \|X_1 - X_2\|^2_{\mathbb{R}^{2N}}.$$

(H4) Il existe $k_* > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application partielle $\nabla_X L(t, \cdot, \cdot)$ est k_*-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, c'est-à-dire :

$$\forall X_1 \text{ et } X_2 \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \qquad \|\nabla_X L(t, X_1) - \nabla_X L(t, X_2)\|_{\mathbb{R}^{2N}} \leq k_* \|X_1 - X_2\|_{\mathbb{R}^{2N}}.$$

Le résultat d'existence et d'unicité d'une solution p.p. est :

Théorème 12.7 (Theorem 3.5, [4]). *Supposons que les hypothèses* **(H1)** *et* **(H3)-(H4)** *soient vérifiées. Alors l'équation* (12.1) *admet une unique solution bornée x qui est p.p. et qui vérifie $mod(x) \subset mod(\nabla L)$.*

Remarque 12.8. *i) Il n'est imposé aucune condition sur la constante de Lipschitz dans l'hypothèse* **(H4)***.*

ii) Une partie des résultats de ce paragraphe prolongent et améliorent plusieurs résultats de Blot qui ont été obtenus par des méthodes variationnelles dans [48]-[52].

Pour établir ce résultat d'existence et d'unicité d'une solution p.p., nous commençons par construire une solution bornée en utilisant la forme hamiltonienne (12.4) associée à l'équation d'Euler-Lagrange (12.1), et ensuite nous obtenons l'unicité de la solution bornée en utilisant le corollaire 12.2. Pour montrer que cette unique solution bornée est p.p., nous établissons un résultat du type du théorème 7.8, p. 31 en utilisant la fonction r définie par (12.5). Pour construire cette solution bornée, nous utilisons la méthode des *fonctions directrices* au système hamiltonien (12.4) en appliquant le théorème 10.7, p. 46 avec $W(X) = \frac{1}{4}\|X\|^2_{\mathbb{R}^{2N}}$ et $V(X) = \ll x \mid p \gg_{\mathbb{R}^{2N}}$ où $X = [x, p]$.

Remarque 12.9. *Tous les résultats de ce paragraphe (le théorème 12.1 et les corollaires 12.2, 12.3 et 12.5) peuvent s'étendre au cas de la dimension infinie, c'est-à-dire lorsque $\mathbb{R}^N$ est remplacé par un espace de Hilbert général, sauf celui qui concerne l'existence d'une solution bornée (théorème 12.7), car il est obtenu en utilisant la méthode des fonctions directrices. Pour un espace de Hilbert général H, les énoncés du théorème 12.1 et des corollaires 12.2, 12.3 et 12.5) restent valides si l'on remplace l'expression "x solution bornée (x et $x' \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$)" par "$x$ solution vérifiant $x(\mathbb{R}) \subset K$ et $x'(\mathbb{R}) \subset K$ où K est un compact de H".*

Troisième partie 3. Solutions presque-automorphes d'équations d'évolution

13. Introduction

Dans cette partie, nous décrivons les principaux résultats de [11, 12, 15, 17, 19, 22] portant sur l'étude des solutions presque-automorphes (p.a.) ou pseudo presque-automorphes (pseudo p.a.). d'équations d'évolution. Les résultats de cette partie sont essentiellement des conditions suffisantes d'existence de solutions p.a. ou pseudo p.a.. Une première partie [12, 15] de ce travail a consisté à améliorer et généraliser un théorème de Fink (Theorem 1, [83]). Ce théorème donne une condition suffisante d'existence de solution p.a. d'une équation différentielle ordinaire définie sur $\mathbb{R}^n$. La principale condition suffisante est l'existence et l'unicité d'une solution à valeurs dans un compact qui minimise une fonctionnelle. Ce théorème est l'analogue du (Theorem 2, [83]) pour les fonctions p.a. (cf. le théorème 7.10, p. 32). Dans une deuxième partie, nous avons étendu ces résultats à des équations aux dérivées partielles [22]. Ce théorème de Fink ne pouvant pas s'étendre aux solutions pseudo p.a., dans une troisième partie ([19]), nous avons adapté et utilisé un théorème de Perov (Theorem 3, [118]) pour obtenir un résultat d'existence et d'unicité d'une solution pseudo p.a.. Dans le cadre des équations dissipatives, nous avions auparavant établi des résultats d'existence de solutions pseudo p.a. dans [17] et de solutions pseudo presque-périodiques (pseudo p.p.) dans [11].

14. Généralisation d'un théorème de Fink

Dans [15], (écrit en collaboration avec S. Fatajou et G.M. N'Guérékata), nous améliorons et généralisons un résultat de Fink sur les solutions p.a. d'une équation différentielle qui est cité p. 57 (théorème 14.2). Ces résultats sont appliqués à des équations différentielles du second ordre, notamment à des équations de Liénard.

L'équation différentielle ordinaire considérée est la suivante :

$$x'(t) = f(t, x(t)), \tag{14.1}$$

où X est un espace de Banach et $f : \mathbb{R} \times X \to X$ est une application continue. Nous allons commencer par citer le résultat de Fink que nous allons généraliser. Pour cela il est nécessaire de préciser quelques définitions sur les fonctions p.a.. Pour la définition d'une fonction p.a., nous renvoyons à la définition 4.1, p. 20. Pour les solutions d'équations différentielles, une notion importante de presque-automorphie est celle de fonctions compactes presque-automorphes (compactes p.a.). Une application $x : \mathbb{R} \to X$ est dite compacte p.a. si les limites dans la définition 4.1, p. 20, sont uniformes sur tout intervale borné de $\mathbb{R}$. Pour la définition d'une fonction p.a. en t uniformément par rapport à $x \in X$, nous renvoyons à la définition 4.5, p. 21. Dans [83], Fink utilise la notion de fonction compacte p.a. en t uniformément par rapport à $x \in X$.

Définition 14.1. *Une application $f : \mathbb{R} \times X \to X$ est dite compacte p.a. en t uniformément par rapport à $x \in X$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

i) $f \in C(\mathbb{R} \times X, X)$,

ii) pour tout compact K de X et pour toute suite numérique $(t'_n)_n$, il existe une application $g : \mathbb{R} \times X \to X$ et une sous-suite notée $(t_n)_n$ vérifiant pour tout intervalle borné I

de $\mathbb{R}$ *:*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in I}\sup_{x\in K}\|f(t+t_n,x)-g(t,x)\|=0 \ \ et \ \ \lim_{n\to\infty}\sup_{t\in I}\sup_{x\in K}\|g(t-t_n,x)-f(t,x)\|=0.$$

La notion de fonction f compacte p.a. en t uniformément par rapport à $x \in X$ est plus forte que celle de p.a. en t uniformément par rapport à $x \in X$ donnée dans la définition 4.5, p. 21. Pour comparer ces deux définitions, nous renvoyons à la caractérisation des fonctions p.a. en t uniformément par rapport à $x \in X$, qui se trouve dans le théorème 4.11, p. 22.

Pour énoncer le résultat principal de Fink, nous avons besoin de donner quelques notations et définitions. Soit K un compact de X. Notons par $C_K(\mathbb{R}, X)$ l'ensemble :

$$C_K(\mathbb{R}, X) = \{x \in C(\mathbb{R}, X)\,;\, \forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) \in K\}\,;$$

et par x_τ pour $\tau \in \mathbb{R}$ et $x \in C(\mathbb{R}, X)$, la fonction définie par $x_\tau(t) = x(\tau + t)$ pour $t \in \mathbb{R}$. Dans [83], Fink appelle une *fonctionnelle sous-variante* associée au compact K, une application $\lambda_K : C_K(\mathbb{R}, X) \to \mathbb{R}$ vérifiant la condition suivante :

$$\text{si } x_{\tau_n} \to y \text{ uniformément sur tout compact de } \mathbb{R}, \text{ alors } \lambda_K(y) \le \lambda_K(x). \tag{14.2}$$

Notons $\mathcal{F}_K$ l'ensemble des solutions de l'équation (14.1) vérifiant $x(t) \in K$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Une solution x_* de l'équation (14.1) est dite K-minimale si

$$x_* \in \mathcal{F}_K \qquad \text{et} \qquad \lambda_K(x_*) = \inf\{\lambda_K(x)\,;\, x \in \mathcal{F}_K\}\,. \tag{14.3}$$

Théorème 14.2 (Fink, Theorem 1, [83])**.** *Ici* $X = \mathbb{R}^N$*. Soit* K *un compact de* $\mathbb{R}^N$ *et* λ_K *une fonctionnelle sous-variante associée à* K*. Supposons que* f *soit* **compacte p.a.** *en* t *uniformément par rapport à* $x \in \mathbb{R}^N$ *et que l'équation* (14.1) *admette au moins une solution définie sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* K*. Si l'équation* (14.1) *admet une et une seule* K*-minimale solution* x_**, alors* x_* *est compacte p.a..*

Remarque 14.3. *Dans le cas p.a., contrairement au cas p.p., la notion d'enveloppe n'intervient pas dans la définition d'une solution* K*-minimale et dans le théorème 14.2, (cf. la formule* (7.5) *et le théorème 7.10, p. 32).*

En utilisant ce résultat de Fink, pour obtenir l'existence d'une solution compacte p.a., il faut montrer l'existence et l'unicité d'un élément de $\mathcal{F}_K$ qui atteigne la borne inférieure du problème d'optimisation (14.3). Dans le théorème 14.2, l'hypothèse faite sur l'existence d'une solution définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans K, permet d'affirmer que l'ensemble $\mathcal{F}_K$ ne soit pas vide. Pour obtenir l'existence d'une solution définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans K à partir d'une solution du même type définie sur la demi-droite $[t_0, +\infty)$, Fink établit le résultat suivant :

Proposition 14.4 (Fink, Lemma 2, [83])**.** *Ici* $X = \mathbb{R}^N$*. Soit* K *un compact de* $\mathbb{R}^N$*. Supposons que* f *soit compacte p.a. en* t *uniformément par rapport à* $x \in \mathbb{R}^N$*. Si l'équation* (14.1) *admet au moins une solution définie sur* $[t_0, +\infty)$ *à valeurs dans* K*, alors il existe solution définie sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* K*.*

Nous avons généralisé et amélioré le théorème 14.2. Nous avons établi une condition suffisante d'existence d'une solution compacte p.a. lorsque la fonction f de l'équation (14.1) est définie sur un espace de Banach. Nous avons aussi réduit l'hypothèse faite sur f ; au lieu d'imposer que f soit compacte p.a., nous supposons seulement que f soit p.a. en t uniformément par rapport à x, au sens de la définition 4.5 p. 21.

Un exemple de fonction p.a. en t uniformément par rapport à $x \in X$ est $f(t,x) = A(t)x + b(t)$ où $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(X,X)$ et $b : \mathbb{R} \to X$ sont p.a.. Un autre exemple est $f(t,x) = G(x) + b(t)$ où $G \in C(X,X)$ et $b : \mathbb{R} \to X$ est p.a.. Par contre sur ces deux exemples, si nous voulions que f soit compacte p.a. en t uniformément par rapport à $x \in X$, il faudrait imposer que A et b soient compactes p.a..

Pour la notion de fonctionnelle sous-variante, nous avons choisi une définition légèrement plus restrictive que celle donnée par Fink dans [83]. Notre définition permet d'obtenir l'existence d'une solution K-minimale de l'équation (14.1), lorsque l'ensemble $\mathcal{F}_K$ n'est pas vide.

Définition 14.5 ([15], p. 676)**.** *Soit K un compact de X. Une fonctionnelle sous-variante associée au compact K est une application $\lambda_K : C_K(\mathbb{R}, X) \to \mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions suivantes :*

i) λ_K est invariant par translation : $\lambda_K(x_\tau) = \lambda_K(x)$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}$,

ii) λ_K est semicontinue inférieurement pour la topologie de la convergence compacte :

$$\text{(14.4)} \quad \text{si } x_n \to y \text{ uniformément sur tout compact de } \mathbb{R}, \text{ alors } \lambda_K(y) \leq \liminf_{n\to\infty} \lambda_K(x_n).$$

Une fonctionnelle sous-variante au sens de cette dernière définition vérifie évidemment (14.2), donc elle est aussi sous-variante au sens de Fink. Un exemple de fonctionnelle sous-variante associée à un ensemble compact K au sens de la définition 14.5 est

$$\lambda_K(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \Phi(x(t)) \text{ pour } x \in C_K(\mathbb{R}, X) \tag{14.5}$$

où $\Phi \in C(K, \mathbb{R})$. Pour les applications, nous utiliserons des fonctionnelles sous-variantes du type (14.5) où Φ est une forme quadratique sur l'espace de Banach X. La généralisation du théorème de Fink (théorème 14.2) est la suivante :

Théorème 14.6 (Theorem 2.3, [15])**.** *Supposons que f soit p.a. en t uniformément par rapport à $x \in X$ et que l'équation* (14.1) *admette au moins une solution x_0 définie sur $[t_0, +\infty)$ telle que $\{x_0(t)\,;\, t \geq t_0\}$ soit relativement compact. Soit K un compact de X tel que*

$$\{x_0(t)\,;\, t \geq t_0\} \subset K$$

et soit λ_K une fonctionnelle sous-variante associée au compact K au sens de la définiton 14.5.

i) Alors l'équation (14.1) *admet au moins une K-minimale solution.*

ii) Si de plus l'équation (14.1) *admet une et une seule K-minimale solution, alors elle est compacte p.a..*

Remarque 14.7. *Dans ce nouveau résultat (théorème 14.6), contrairement au théorème de Fink (théorème 14.2), l'existence d'un élément de $\mathcal{F}_K$ qui atteigne la borne inférieure du problème d'optimisation* (14.3) *est acquise. Pour appliquer ce théorème, il suffit de vérifier l'unicité du minimiseur. En fait l'ensemble $\mathcal{F}_K$ est une partie séquentiellement compacte de $C(\mathbb{R}, X)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$, et une fonctionnelle sous-variante au sens de la définition 14.5 est séquentiellement semi-continue inférieurement, ce qui permet d'établir l'existence d'un minimiseur, si évidemment l'ensemble $\mathcal{F}_K$ n'est pas vide. La non-vacuité de l'ensemble $\mathcal{F}_K$ résulte de l'hypothèse faite sur l'existence d'une solution définie sur $[t_0, +\infty)$ à valeurs dans K et du résultat suivant qui généralise la proposition 14.4, puisque nous ne supposons pas que f est compacte p.a..*

Proposition 14.8 (Proposition 2.1, [15]). *Supposons que f soit p.a. en t uniformément par rapport à $x \in X$. Si l'équation* (14.1) *admet au moins une solution x_0 définie sur $[t_0, +\infty)$ telle que $\{x_0(t)\,;\, t \geq t_0\}$ soit relativement compact, alors il existe une solution x de* (14.1) *définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant*

$$\{x(t)\,;\, t \in \mathbb{R}\} \subset \overline{\{x_0(t)\,;\, t \geq t_0\}}. \tag{14.6}$$

Application. Nous appliquons le théorème 14.6 à l'équation de Liénard suivante :

$$x''(t) + \frac{d}{dt}\left[\nabla F(x(t))\right] + Cx(t) = e(t), \tag{14.7}$$

où X est un espace de Hilbert, $e : \mathbb{R} \to X$ est une fonction p.a., $F : X \to \mathbb{R}$ est une application convexe de classe C^2 et $C \in \mathcal{L}(X, X)$ est auto-adjoint et bijectif. En appliquant le théorème 14.6 à l'équation différentielle

$$y'(t) = f(t, y(t)) \text{ et } f(t, y) = [y_2 - \nabla F(y_1), e(t) - Cy_1] \tag{14.8}$$

avec $y = [y_1, y_2] \in X \times X$ et à la fonctionnelle sous-variante

$$\lambda_K(y) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} \|y_1(t)\|^2 + \frac{1}{2} \ll C^{-1}y_2(t) \mid y_2(t) \gg \right),$$

nous obtenons le résultat suivant en procédant d'une manière analogue à celle du paragraphe 10, p. 44, portant sur l'étude des solutions p.p. de cette même équation.

Proposition 14.9 (Proposition 4.3, [15]). *Soit K un compact de X. Si l'équation* (14.7) *admet au moins une solution x_0 définie sur $[t_0, +\infty)$ telle que $\{x_0(t)\,;\, t \geq t_0\}$ et $\{x_0'(t)\,;\, t \geq t_0\}$ soient relativement compacts, alors l'équation* (14.7) *admet au moins une solution compacte p.a..*

Dans le cas linéaire, nous déduisons du théorème 14.6 une généralisation au cas p.a. d'un célèbre résultat de 1928 de Favard [80] qui porte sur les solutions p.p. lorsque $X = \mathbb{R}^N$, A et b sont p.p..

L'équation (14.1) dans le cas linéaire devient

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \tag{14.9}$$

où $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(X, X)$ et $b : \mathbb{R} \to X$ sont p.a..

Corollaire 14.10 (Corollary 2.6, [15]). *Ici l'espace de Banach X est uniformément convexe. Soit K un compact de X. Supposons que l'équation* (14.9) *admette au moins une solution x_0 définie sur $[t_0, +\infty)$ telle que $\{x_0(t)\,;\, t \geq t_0\} \subset K$. Si toute solution y non triviale de l'équation homogène*

$$y'(t) = A(t)y(t)$$

vérifie

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} \|y(t)\| > 0, \tag{14.10}$$

alors l'équation (14.9) *admet au moins une solution compacte p.a..*

Un autre corollaire du théorème 14.6 est le suivant :

Corollaire 14.11 (Corollary 2.4, [15]). *Supposons que f soit p.a. en t uniformément par rapport à $x \in X$ et que l'équation* (14.1) *admette au moins une solution x_0 définie sur $[t_0, +\infty)$ telle que $\{x_0(t)\,;\, t \geq t_0\}$ soit relativement compact. Si l'équation* (14.1) *admet au plus une solution bornée sur $\mathbb{R}$, alors il existe une unique solution compacte p.a..*

Remarque 14.12. *Dans le cas p.p., c'est-à-dire lorsque f est p.p. (au lieu de p.a.) en t uniformément par rapport à $x \in X$, ce dernier corollaire est faux, c'est-à-dire qu'il n'existe pas nécessairement une solution p.p. (Theorem 6.2, p. 99,* [84]*). Par contre la proposition 14.8 et le corollaire 14.11, nous permettent d'affirmer qu'il existe une unique solution bornée x sur $\mathbb{R}$ qui est compacte p.a. et qui vérifie* (14.6) *dans le cas où f est p.p. et où il y a unicité de la solution bornée.*

Le corollaire 14.11 a été d'abord démontré dans [12] pour le cas particulier de l'équation scalaire de Liénard suivante

$$x''(t) + f(x(t))x'(t) + g(x(t)) = e(t), \tag{14.11}$$

où $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction p.a., f et $g : (a, b) \to \mathbb{R}$, $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ sont deux fonctions localement lipschitziennes sur (a, b). Supposons de plus que $f(x) \geq 0$ sur (a, b) et que g soit strictement décroissante sur (a, b). En utilisant le lemme 9.2, p. 41, nous obtenons du corollaire 14.11 le résultat suivant.

Théorème 14.13 (Theorem 2.1, [12]). *Si l'équation* (14.11) *admet au moins une solution définie et bornée sur $[t_0, +\infty)$, alors l'équation* (14.11) *admet une et une seule solution ϕ bornée sur $\mathbb{R}$, de plus ϕ est p.a. ; et chaque solution x définie et bornée sur $[t_0, +\infty)$ est asymptotiquement p.a. au sens suivant :*

$$\lim_{t \to +\infty} |x(t) - \phi(t)| + |x'(t) - \phi'(t)| = 0.$$

15. Extension du théorème de Fink aux EDP

Puis dans [22], (écrit en collaboration avec K. Ezzinbi), le théorème 14.6, p. 58 est étendu pour des équations d'évolution semi-linéaires où la partie linéaire est un opérateur linéaire non-borné défini sur un espace de Banach. Puis ces résultats sont appliqués à une équation des ondes, puis à une équation de la chaleur. L'équation d'évolution considérée est la suivante :

$$x'(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), \tag{15.1}$$

où X est un espace de Banach, $f : \mathbb{R} \times X \to X$ est une application continue et $A : D(A) \subset X \to X$ est un opérateur linéaire non-borné. Nous supposons que l'opérateur A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ fortement continu dans X. La notion de solution utilisée est celle de la définition 3.16, p. 16. Nous utilisons la notion de solution K-minimale (K compact de X) définie dans la formule (14.3), p. 57, où $\mathcal{F}_K$ est l'ensemble des solutions de l'équation (15.1) vérifiant $x(t) \in K$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. L'énoncé obtenu pour l'équation (15.1) est semblable à celui du théorème 14.6, p. 58.

Théorème 15.1 (Theorem 3.6, [22]). *Supposons que f soit p.a. en t uniformément par rapport à $x \in X$ et que l'équation* (15.1) *admette au moins une solution x_0 définie sur $[t_0, +\infty)$ telle que $\{x_0(t)\,;\, t \geq t_0\}$ soit relativement compact. Soit K un compact de X tel que*

$$\{x_0(t)\,;\, t \geq t_0\} \subset K$$

et soit λ_K une fonctionnelle sous-variante associée au compact K au sens de la définiton 14.5.

i) Alors l'équation (15.1) *admet au moins une K-minimale solution.*

ii) Si de plus l'équation (15.1) *admet une et une seule K-minimale solution, alors elle est compacte p.a..*

En adaptant légèrement la démonstration de ce dernier théorème, nous obtenons l'analogue pour le cas des solutions p.p.. Dans le cas p.p., il est nécessaire d'utiliser la famille d'équations suivante, pour $f_* \in H(f)$ (cf. la définition 7.2, p. 30),

$$x'(t) = Ax(t) + f_*(t, x(t)). \tag{15.2}$$

Proposition 15.2 (Corollary 3.8, [22])**.** *Supposons que f soit p.p. en t uniformément par rapport à $x \in X$ et que l'équation* (15.1) *admette au moins une solution x_0 définie sur $[t_0, +\infty)$ telle que $\{x_0(t)\,;\, t \geq t_0\}$ soit relativement compact. Soit K un compact de X tel que*

$$\{x_0(t)\,;\, t \geq t_0\} \subset K$$

et soit λ_K une fonctionnelle sous-variante associée au compact K au sens de la définiton 14.5.

i) Alors l'équation (15.1) *admet au moins une K-minimale solution.*

ii) Si de plus pour tout $f_* \in H(f)$ l'équation (15.2) *admet au plus une K-minimale solution, alors l'unique K-minimale solution est p.p..*

Pour illustrer le théorème 15.1, nous considérons l'équation des ondes non autonome suivante définie sur un ouvert quelconque Ω de $\mathbb{R}^N$

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - \Delta u(t,x) = g\left(u_t(t,x)\right) + \lambda u(t,x) + h\left(t,x\right), \text{ si } t \geq t_0 \text{ et } x \in \Omega, \\ \\ u(t,x) = 0, \text{ si } t \geq t_0 \text{ et } x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{15.3}$$

où Δ désigne l'opérateur de Laplace. Nous utiliserons les hypothèses suivantes :

(H1) L'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est décroissante (au sens large) et lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

(H2) $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que si $u \in H_0^1(\Omega)$ et $-\Delta u = \lambda u$, alors $u = 0$.

(H3) L'application $h : \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est continue et $[t \mapsto h(t,\cdot)] \in AA(L^2(\Omega))$ (presque-automorphe).

Dans le cas particulier où l'ouvert Ω est borné et suffisamment régulier pour que le problème de Dirichlet : $\Delta u + \lambda u = 0$ dans Ω et $u = 0$ sur $\partial\Omega$ admette une suite de valeurs propres $\{\lambda_n\,;\, n \geq 1\}$ telles que $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$, alors λ vérifie l'hypothèse **(H2)** si et seulement si λ n'est pas une valeur propre de $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Pour cette équation des ondes, nous utilisons l'espace de Hilbert $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire associé à la norme

$$\|u\|_X = \left(\int_\Omega \left(|u_1(x)|^2 + |\nabla u_1(x)|^2 + |u_2(x)|^2\right)\, dx\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ pour } u = [u_1, u_2] \in X,$$

où l'opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \to X$ est défini par

$$\begin{cases} D(A) = \{u \in X\,;\, \Delta u_1 \in L^2(\Omega) \text{ et } u_2 \in H_0^1(\Omega)\}\,, \\ Au = [u_2, \Delta u_1 + \lambda u_1]. \end{cases}$$

L'opérateur A est la somme de l'opérateur linéaire continu $L : X \to X$ avec $Lu = [0, (1+\lambda)u_1]$ et de l'opérateur linéaire non-borné $B : D(B) \subset X \to X$ avec $D(B) = D(A)$ et $Bu = [u_2, \Delta u_1 - u_1]$. L'opérateur B engendre un groupe d'isométrie sur X (cf. par exemple Proposition 2.6.9, p. 33, [67]), donc l'opérateur A engendre un semi-groupe fortement continu dans X. Le semi-groupe engendré par A n'est pas nécessairement contractant, puisque λ est de signe quelconque. Avec les hypothèses **(H1)** et **(H3)**, l'application $f : \mathbb{R} \times X \to X$ définie par

$$f(t,u)(x) = [0, g(u_2(x)) + h(t,x)] \text{ pour } t \in \mathbb{R}, u \in X \text{ et } x \in \Omega$$

est p.a. en t uniformément par rapport à $u \in X$ et avec ces notations l'équation des ondes (15.3) s'écrit sous la forme

$$u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)). \tag{15.4}$$

En appliquant le théorème 15.1 à la fonctionnelle sous-variante définie sur $C_K(\mathbb{R}, X)$ par

$$\lambda_K(u) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla u_1(t,x)|^2 + |u_2(t,x)|^2 - \lambda\, |u_1(t,x)|^2 \right) dx, \tag{15.5}$$

nous obtenons le résultat suivant :

Proposition 15.3 (Proposition 6.14, [22]). *Supposons que les hypothèses* **(H1)-(H3)** *soient vérifiées. Si l'équation* (15.3) *admet au moins une solution u_0 définie sur $[t_0, +\infty)$ telle que $\{u_0(t)\,;\, t \geq t_0\}$ soit relativement compact dans X, alors l'équation* (15.3) *admet au moins une solution compacte p.a.. Si de plus g est strictement décroissante alors cette solution est unique.*

Ici, nous donnons les propriétés vérifiées par la fonctionnelle sous-variante (15.5). Pour cela notons

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla w_1(t,x)|^2 + |w_2(t,x)|^2 - \lambda\, |w_1(t,x)|^2 \right) dx, \tag{15.6}$$

où u et v sont deux solutions bornées sur $\mathbb{R}$ de (15.4) et $w = u - v$. Alors l'application Φ est décroissante (au sens large) et si Φ est constante sur $\mathbb{R}$ et égale à une constante négative ou nulle : $\Phi(t) \equiv \Phi(0) \leq 0$, alors $u = v$ (cf. Lemma 6.13, [22]), malgré que la forme quadratique sous-jacente à Φ ne soit pas positive (λ est de signe quelconque, λ vérifie seulement l'hypothèse **(H2)**). Nous allons donner l'idée de la démonstration de ces deux dernières propriétés, en faisant les calculs formellement. *En dérivant* (15.6) *et en utilisant l'équation* (15.3)*, on obtient*

$$\frac{d\Phi}{dt}(t) = \int_\Omega \{g(u_2(t,x)) - g(v_2(t,x))\} \{u_2(t,x) - v_2(t,x)\}\, dx, \tag{15.7}$$

et de l'hypothèse **(H1)** *découle la décroissance de Φ. Pour la seconde propriété, si Φ est constante, de* (15.7) *et* **(H1)***, on en déduit que $g(u_2(t,x)) = g(v_2(t,x))$, donc*

$$\partial_{tt} w_1(t,x) - \Delta w_1(t,x) = \lambda w_1(t,x), \ \text{ si } t \in \mathbb{R} \text{ et } x \in \Omega, \tag{15.8}$$

ainsi en injectant cette dernière équation dans (15.6)*, on obtient*

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(-w_1(t,x)\partial_{tt} w_1(t,x) + |\partial_t w_1(t,x)|^2 \right) dx \equiv \Phi(0) \leq 0,$$

par conséquent

$$\int_\Omega w_1(t,x)\partial_{tt}w_1(t,x)\,dx \geq 0. \tag{15.9}$$

Notons

$$\Psi(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |w_1(t,x)|^2\,dx.$$

En dérivant 2 fois Ψ*, nous obtenons*

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2}(t) = \int_\Omega \left(w_1(t,x)\partial_{tt}w_1(t,x) + |\partial_t w_1(t,x)|^2\right)\,dx, \tag{15.10}$$

donc avec (15.9)*, nous en déduisons que* $\dfrac{d^2\Psi}{dt^2}(t) \geq 0$ *sur* $\mathbb{R}$*. La fonction* Ψ *est donc convexe et bornée sur* $\mathbb{R}$*, donc elle est constante :* $\dfrac{d^2\Psi}{dt^2}(t) = 0$ *; ainsi les relations* (15.9) *et* (15.10)*, nous permette d'affirmer que* $\partial_t w_1(t,x) = 0$*. Avec* (15.8)*, nous obtenons* $\Delta w_1(t,x) + \lambda w_1(t,x) = 0$*. Le résultat découle de l'hypothèse* **(H2)***.*

Dans la cas p.p., nous obtenons un résultat similaire à la proposition 15.3 en appliquant la proposition 15.2. Pour cela, formulons l'hypothèse suivante :

(H4) L'application $h : \mathbb{R}\times\overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est continue et $[t \mapsto h(t,\cdot)] \in AP(L^2(\Omega))$ (presque-périodique).

Proposition 15.4 (Corollary 6.15, [22])**.** *Supposons que les hypothèses* **(H1)***,* **(H2)** *et* **(H4)** *soient vérifiées. Si l'équation* (15.3) *admet au moins une solution* u_0 *définie sur* $[t_0,+\infty)$ *telle que* $\{u_0(t)\,;\,t\geq t_0\}$ *soit relativement compact dans* X*, alors l'équation* (15.3) *admet au moins une solution définie sur* $\mathbb{R}$ *qui soit p.p.. Si de plus* g *est strictement décroissante alors cette solution est unique.*

Pour s'affranchir de l'hypothèse de l'existence d'une solution à valeurs dans un compact, il est nécéssaire de faire des hypothèses sur le semi-groupe. En supposant que le semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ soit compact, nous avons établi qu'une solution définie et bornée sur $[t_0,+\infty)$ de l'équation (15.1) a son ensemble image relativement compact (Proposition 4.8, [22]), ce qui permet d'obtenir le résultat suivant.

Théorème 15.5 (Theorem 3.3, [22])**.** *Supposons que le semi-groupe* $(T(t))_{t\geq 0}$ *soit compact, que* f *soit p.a. en* t *uniformément par rapport à* $x\in X$ *et que l'équation* (15.1) *admette au moins une solution* x_0 *définie et bornée sur* $[t_0,+\infty)$*. Supposons aussi que l'application* f *vérifie*

$$\forall R>0, \qquad \sup_{t\geq t_0}\sup_{\|x\|\leq R}\|f(t,x)\| < +\infty.$$

i) Alors $\{x_0(t)\,;\,t\geq t_0\}$ *est relativement compact.*
ii) Soit K *un compact de* X *tel que*

$$\{x_0(t)\,;\,t\geq t_0\} \subset K$$

et soit λ_K *une fonctionnelle sous-variante associée au compact* K *au sens de la définiton 14.5. Alors l'équation* (15.1) *admet au moins une* K*-minimale solution.*

iii) Si de plus l'équation (15.1) *admet une et une seule K-minimale solution, alors elle est compacte p.a..*

En appliquant ce résultat à l'équation de la chaleur (15.11) ci-dessous, nous obtenons un résultat d'existence d'une solution p.a., sans supposer l'existence d'une solution bornée sur $[t_0, +\infty)$. L'équation de la chaleur considérée est :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = g\left(u(t,x)\right) + h\left(t,x\right), \text{ si } t \geq t_0 \text{ et } x \in \Omega, \\ \\ u(t,x) = 0, \text{ si } t \geq t_0 \text{ et } x \in \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{15.11}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ dont la frontière $\partial\Omega$ est lipschitzienne. Notons λ_1 la plus petite valeur propre de $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$ ($\lambda_1 > 0$). Nous utiliserons les hypothèses suivantes :

(H5) L'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est localement lipschitzienne, $g(0) = 0$ et vérifie

$$\limsup_{|r| \to +\infty} \frac{g(r)}{r} < \lambda_1.$$

(H6) L'application $r \mapsto g(r) - \lambda_1 r$ est décroissante (au sens large) sur $\mathbb{R}$.

(H7) L'application $h : \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est continue, vérifie $h(t,x) = 0$ sur $\mathbb{R} \times \partial\Omega$ et $[t \mapsto h(t,\cdot)] \in AA(C_0(\Omega))$ (presque-automorphe).

Remarque 15.6. *Les fonctions $g(r) = \lambda_1 \sin(r)$ ou $g(r) = \lambda_1 r - r^3$ vérifient les hypothèses* **(H5)** *et* **(H6)**. *Une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localement lipschitzienne telle que la fonction $r \mapsto g(r) - \lambda r$ soit décroissante avec $\lambda < \lambda_1$ et $g(0) = 0$, vérifie aussi les hypothèses* **(H5)** *et* **(H6)**.

Pour l'équation de la chaleur (15.11), nous utilisons la théorie C_0, c'est-à-dire l'espace de Banach $X = C_0(\Omega) = \{u \in C(\Omega)\,;\, u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ muni de la norme $\|u\|_X = \sup\limits_{x \in \Omega} |u(x)|$ où l'opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \to X$ est défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} D(A) = \left\{u \in C_0(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\,;\, \Delta u \in C_0(\Omega)\right\}, \\ Au = \Delta u. \end{array} \right.$$

L'opérateur A engendre un semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ fortement continu dans X qui est compact. Le semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est aussi exponentiellement stable, plus précisément, $\|T(t)\| \leq M \exp(-\lambda_1 t)$ pour $t \geq 0$. Avec la continuité de g, $g(0) = 0$ et l'hypothèse **(H7)**, l'application $f : \mathbb{R} \times X \to X$ définie par

$$f(t,u)(x) = g(u(x)) + h(t,x) \text{ pour } t \in \mathbb{R}, u \in X \text{ et } x \in \Omega$$

est p.a. en t uniformément par rapport à $u \in X$. Avec ces notations l'équation de la chaleur (15.11) s'écrit sous la forme (15.4). La solution maximale (au sens de la définition 3.16, p. 16) de

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'(t) = Au(t) + f(t,u(t)) & \text{si } t \geq 0, \\ \\ u(0) = x_0 & \end{array} \right.$$

est globale sur $[0, +\infty)$ et vérifie $\sup_{t\geq 0} \|u(t)\|_X < \infty$. Ce dernier résultat découle de l'hypothèse **(H5)** et de $\sup_{t\geq 0} \|h(t,\cdot)\|_X < \infty$ (cf. par exemple Proposition 8.3.7, p. 117, [67]) ; et permet d'appliquer le théorème 15.5 à l'équation de la chaleur (15.11).

Proposition 15.7 (Proposition 6.7, [22])**.** *Si les hypothèses* **(H5)-(H7)** *sont vérifiées, alors l'équation* (15.11) *admet au moins une solution u qui soit compacte p.a.. Si v est une solution qui est seulement p.a., alors il existe $w_0 \in X$ vérifiant*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad v(t) = u(t) + w_0, \tag{15.12}$$

donc v est aussi compacte p.a.. Si de plus la fonction $r \mapsto g(r) - \lambda_1 r$ est strictement décroissante, alors la solution compacte p.a. est unique.

Remarque 15.8. *w_0 dans* (15.12) *est un vecteur propre de $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$ associé à la plus petite valeur propre λ_1.*

Pour le cas presque-périodique, nous obtenons un résultat similaire à la proposition 15.7 (cf. Corollary 6.8, [22]).

Pour établir la proposition 15.7, nous avons utilisé la fonctionnelle sous-variante suivante :

$$\lambda_K(u) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{1}{2}\int_\Omega |u(t,x)|^2\, dx, \text{ pour } u \in C_K(\mathbb{R}, X). \tag{15.13}$$

Donnons les propriétés vérifiées par cette fonctionnelle sous-variante. Pour cela notons par

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |v(t,x) - u(t,x)|^2\, dx,$$

où u et v sont deux solutions bornées sur $\mathbb{R}$ de (15.11). Alors l'application Φ est décroissante (au sens large) et si Φ est constante sur $\mathbb{R}$, alors il existe un $w_0 \in X$ tel que $v(t,x) = u(t,x) + w_0(x)$ et $g(v(t,x)) = g(u(t,x)) + \lambda_1 w_0(x)$ sur $\mathbb{R} \times \Omega$, (cf. Lemma 6.6, [22]).

16. Solutions pseudo presque-automorphes

Dans [19] (écrit en collaboration avec E. Ait Dads et S. Fatajou), nous établissons un résultat d'existence et d'unicité de la solution pseudo presque-automorphe de l'équation

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{16.1}$$

définie sur un espace de Hilbert X où $f : \mathbb{R} \times X \to X$ est une application pseudo presque-automorphe. Puis ces résultats sont appliqués à une équation de Liénard, puis à un système hamiltonien. Rappelons quelques définitions sur les fonctions pseudo presque-automorphes.

Définition 16.1. *Une application $x : \mathbb{R} \to X$ est dite pseudo presque-automorphe (pseudo p.a.) si*

$$u = u_1 + u_2, \tag{16.2}$$

où $u_1 : \mathbb{R} \to X$ est p.a. (cf. définition 4.1, p. 20) et u_2 est ergodique, c'est-à-dire $u_2 : \mathbb{R} \to X$ est continue, bornée et vérifie

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} \|u_2(t)\|\, dt = 0.$$

Remarque 16.2. *L'ensemble des valeurs d'une fonction pseudo p.a. n'est pas relativement compact, mais seulement borné.*

Définition 16.3. *Une application $f : \mathbb{R} \times X \to X$ est dite pseudo p.a. en t uniformément par rapport à $x \in X$ si*

$$f = f_1 + f_2, \tag{16.3}$$

où $f_1 : \mathbb{R} \times X \to X$ est p.a. en t uniformément par rapport à $x \in X$ (cf. définition 4.5, p. 21) et la fonction $t \mapsto f_2(t, x)$ est ergodique, pour tout $x \in X$.

Remarque 16.4. *Les décompositions données dans* (16.2) *et* (16.3) *sont uniques. Dans* (16.2) *(resp.* (16.3)*), la fonction u_1 (resp. f_1) est appelée la composante p.a. et u_2 (resp. f_2) la perturbation ergodique de la fonction u (resp. f).*

La méthode des *fonctionnelles sous-variantes* décrite dans les paragraphes précédents n'existe pas et ne peut pas s'étendre sur les fonctions pseudo p.a.. Pour contourner cette difficulté, nous avons généralisé un résultat de Perov [118] sur l'existence et l'unicité de la solution bornée ou p.p. de l'équation différentielle (16.1). Les hypothèses utilisées sont :

(H1) f est lipschitzienne en x uniformément par rapport à $t \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire : il existe $k_* > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in X, \qquad \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k_* \|x - y\|.$$

(H2) $A \in \mathcal{L}(X, X)$ est auto-adjoint et bijectif.

(H3) Il existe $c_* > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in X, \qquad \ll f(t,x) - f(t,y) \mid A(x-y) \gg \geq c_* \|x - y\|^2.$$

Théorème 16.5 (Perov, Theorem 3, [118])**.** *Supposons que les hypothèses* **(H1)-(H3)** *soient vérifiées. Si la fonction f est continue et si la fonction $t \to \|f(t, 0)\|$ est bornée sur $\mathbb{R}$, alors l'équation* (16.1) *admet une et une seule solution x_f bornée sur $\mathbb{R}$. Si de plus,*

i) *la fonction $f(., x)$ est T-périodique, pour tout $x \in X$, alors x_f est T-périodique,*

ii) *la fonction f est p.p. en t uniformément par rapport à $x \in X$, alors x_f est p.p..*

Remarquons que ce résultat d'existence et d'unicité n'impose pas que la constante de Lipschitz portant sur f soit petite. Pour démontrer ce dernier théorème, Perov a utilisé le théorème de point fixe suivant qui est vérifié sur n'importe quel espace de Banach, notamment sans hypothèse de réflexivité, ce qui est évidemment intéressant pour de nombreux espaces de fonctions p.p. ou de leurs généralisations.

Théorème 16.6 (Perov, Lemma 1, [118])**.** *Soit E est un espace de Banach. Soit $P : E \to E$ une application lipschitzienne vérifiant : $\exists \varepsilon > 0$, $\forall \theta \in [0, 1]$, $\forall x, y \in X$*

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \theta \in [0,1], \forall x, y \in X, \qquad \|x - y - \theta\,(P(x) - P(y))\|_E \geq \varepsilon \|x - y\|_E. \tag{16.4}$$

Alors l'opérateur P admet un unique point fixe.

Ce théorème est une conséquence du théorème du point fixe de Banach. Dans [19], nous avons généralisé le théorème 16.5 au cas des solutions pseudo p.a..

Théorème 16.7 (Theorem 5.1, [19]). *Supposons que les hypothèses* **(H1)-(H3)** *soient vérifiées. Si f est pseudo p.a. en t uniformément par rapport à $x \in X$, alors l'équation* (16.1) *admet une et une seule solution x_f pseudo p.a.. Si de plus, f_1 désigne la composante p.a. de f, alors la composante p.a. de x_{f_1} de x_f est l'unique solution p.a. de l'équation*

$$x'(t) = f_1(t, x(t)). \tag{16.5}$$

Remarque 16.8. *Le théorème 16.7 contient le cas des équations dissipatives, en posant $A = -I_X$, l'hypothèse* **(H3)** *devient :*

$$\exists c_* > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in X, \qquad \ll f(t,x) - f(t,y) \mid x - y \gg \leq -c_* \|x - y\|^2 .$$

Si cette dernière condition est vérifiée, les hypothèses du théorème 16.7 deviennent :

i) f est lipschitzienne en x uniformément par rapport à $t \in \mathbb{R}$,

ii) f est pseudo p.a. en t uniformément par rapport à $x \in X$.

Pour les équations dissipatives, nous avions auparavant établi un résultat d'existence et d'unicité de la solution pseudo p.a. dans [17], *dans un cadre plus général que celui obtenu par le théorème 16.7. L'espace X sur lequel est définie l'équation* (16.1) *est un espace de Banach sur lequel, nous utilisons le produit semi-inférieur défini par $[x,h] = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \dfrac{\|x\| - \|x - \varepsilon h\|}{\varepsilon}$ pour x et $h \in X$. Dans le cas où X est un espace de Hilbert, ce produit est égal à $[x,h] = \ll \dfrac{x}{\|x\|} \mid h \gg$ pour x et $h \in X$ ($x \neq 0$). L'hypothèse de dissipativité utilisée dans* [17] *est*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in X, \qquad [x - y, f(t,x) - f(t,y)] \leq p(t) \|x - y\|^{1+\alpha} \tag{16.6}$$

avec $\alpha \geq 0$ et où $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction majorée par une fonction presque-périodique δ de moyenne strictement négative : $\mathcal{M}\{\delta(t)\}_t = \lim_{r \to +\infty} \dfrac{1}{2r} \displaystyle\int_{-r}^{r} \delta(t)\, dt < 0$. Dans le résultat principal de [17] *(Theorem 5.1), il est établi l'existence et l'unicité de la solution x_* bornée sur $\mathbb{R}$ qui est compacte pseudo p.a.. Cette solution est attractive dans le sens où pour toute solution x de l'équation* (16.1) *définie sur $(0, +\infty)$, on a $\lim_{t \to +\infty} \|x_*(t) - x(t)\| = 0$. Dans ce résultat, il est supposé que la fonction f est lipschitzienne seulement sur toute partie bornée de X, en x uniformément par rapport à $t \in \mathbb{R}$, la fonction f est pseudo p.a. en t uniformément par rapport à $x \in X$ et la fonction f vérifie* (16.6). *Pour les solutions pseudo presque-périodiques, des résultats similaires ont été aussi établis dans* [11].

Dans le cas particulier des solutions p.a., le résultat suivant est un corollaire du théorème 16.7.

Corollaire 16.9 (Theorem 4.2, [19]). *Supposons que les hypothèses* **(H1)-(H3)** *soient vérifiées. Si f est p.a. en t uniformément par rapport à $x \in X$, alors l'équation* (16.1) *admet une et une seule solution p.a..*

Nous avons commencé par étudier l'existence des solutions p.a. de l'équation (16.1) lorsque f est p.a. en t uniformément par rapport à $x \in X$, c'est-à-dire que nous avons d'abord établi le corollaire 16.9. Ensuite pour le théorème 16.7, nous obtenons l'existence et l'unicité d'une solution bornée x_f (resp. p.a. x_{f_1}) de l'équation (16.1) (resp. (16.5)) en utilisant le théorème 16.5 (resp. corollaire 16.9). La conclusion est obtenue en montrant que la différence des 2 solutions : $x_f - x_{f_1}$ est ergodique.

Pour la démonstration du corollaire 16.9, nous transformons l'équation (16.1) de la manière suivante, en posant $B = \alpha A$ pour $\alpha > 0$ et $g(t,x) = f(t,x) - Bx$. Avec les hypothèses **(H1)-(H3)**, nous obtenons l'existence d'un $\alpha > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in H, \qquad \ll g(t,x) - g(t,y) \mid B(x-y) \gg \geq 0.$$

Évidemment, $B \in \mathcal{L}(H,H)$ est auto-adjoint et bijectif, g est lipschitzienne en x uniformément par rapport à $t \in \mathbb{R}$. Dans ce cas $f(t,x) = Bx + g(t,x)$ et l'équation (16.1) devient :

$$x'(t) = Bx(t) + g(t, x(t)). \tag{16.7}$$

Nous étudions l'existence des solutions p.a. de l'équation linéaire associée à (16.7) :

$$x'(t) = Bx(t) + e(t). \tag{16.8}$$

Lemme 16.10 (Lemma 4.3, [19])**.** *Supposons que $B \in \mathcal{L}(X,X)$ soit auto-adjoint et bijectif. Pour chaque second membre e p.a., l'équation* (16.8) *admet une et une seule solution p.a..*

Ensuite pour l'équation non linéaire (16.7), nous utilisons le résultat de point fixe cité dans [118] (cf. le théorème 16.6), pour cela, nous notons les espace suivants : $AA(X)$ l'espace des fonctions p.a. à valeurs dans X,

$$AA^1(X) = \left\{ x \in AA(X) \cap C^1(\mathbb{R}, X) \, ; \, x' \in AA(X) \right\}$$

et les opérateurs suivants : l'injection canonique $i : AA^1(X) \to AA(X)$ avec $ix = x$, l'opérateur $L : AA^1(X) \to AA(X)$ avec $Lx(t) = x'(t) - Bx(t)$ et l'opérateur de superposition $\mathcal{N}_g : AA(X) \to AA(X)$ avec $\mathcal{N}_g(x)(t) = g(t,x)$. Les espaces $AA(X)$ et $AA^1(X)$ sont respectivement munis des normes $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|$ pour $x \in AA(X)$ et $\|x\|_{C^1} = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$ pour $x \in AA^1(X)$. Avec ces normes les espaces $AA(X)$ et $AA^1(X)$ sont des espaces de Banach ; i et $L \in \mathcal{L}(AA^1(X), AA(X))$, $\mathcal{N}_g$ est lipschitzien. Pour appliquer le théorème 16.6, nous notons $P : AA^1(X) \to AA^1(X)$ avec $P = L^{-1} \circ \mathcal{N}_g \circ i$. Pour établir l'hypothèse (16.4) du théorème 16.6, nous établissons des estimations à priori sur les solutions.

Application 1. Nous appliquons le théorème 16.7 à l'équation de Liénard vectorielle

$$x''(t) + \frac{d}{dt}\left[\nabla F(x(t))\right] + Cx(t) = e(t), \tag{16.9}$$

où X est un espace de Hilbert, $e : \mathbb{R} \to X$ est une fonction pseudo p.a., $F : X \to \mathbb{R}$ est une application de classe C^2 et $C \in \mathcal{L}(X,X)$ est auto-adjoint et bijectif. En appliquant le théorème 16.7 à l'équation différentielle

$$y'(t) = f(t, y(t)) \text{ et } f(t,y) = [y_2 - \nabla F(y_1), e(t) - Cy_1]$$

avec $y = [y_1, y_2] \in X \times X$ et à l'opérateur A défini par $Ay = [-y_1 + \varepsilon y_2, \varepsilon y_1 - C^{-1} y_2]$, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, nous obtenons le résultat suivant :

Proposition 16.11 (Proposition 6.2, [19])**.** *Supposons ∇F soit fortement convexe de module $c_* > 0$ et k_*-lipschitzienne sur X (cf.* **(H4)-(H5)***, p.46). Alors l'équation* (16.9) *admet une et une seule solution x pseudo p.a.. Si de plus, e_1 désigne la composante p.a. de e, alors la composante p.a. x_1 de x est l'unique solution p.a. de l'équation*

$$x_1''(t) + \frac{d}{dt}\left[\nabla F(x_1(t))\right] + Cx_1(t) = e_1(t).$$

Application 2. Soit X un espace de Hilbert. Pour une application continue $H : \mathbb{R} \times X \times X \to \mathbb{R}$ telle que l'application partielle $H(t,\cdot,\cdot)$ soit de classe C^1, nous notons par $\nabla_x H$ (resp. $\nabla_p H$) le gradient de la fonction partielle $H(t,x,\cdot)$ (resp. $H(t,\cdot,p)$). Nous appliquons aussi le théorème 16.7 au système hamiltonien

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = \nabla_p H(t,x(t),p(t)) \\ p'(t) = -\nabla_x H(t,x(t),p(t)). \end{array} \right. \tag{16.10}$$

Formulons l'hypothèse suivante :

(H4) L'hamiltonien H est fortement concave-convexe de module $c_* > 0$, c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} - \ll \nabla_x H(t,x_1,p_1) - \nabla_x H(t,x_2,p_2) \mid x_1 - x_2 \gg \\ + \ll \nabla_p H(t,x_1,p_1) - \nabla_p H(t,x_2,p_2) \mid x_1 - p_2 \gg \\ \geq c_* \left(\|x_1 - x_2\|^2 + \|p_1 - p_2\|^2 \right), \end{array} \right.$$

pour tous $t \in \mathbb{R}$, x_1, x_2, p_1 et $p_2 \in X$.

En appliquant le théorème 16.7 à l'équation différentielle

$$X'(t) = J\nabla_X H(t, X(t)) \text{ avec } X = [x,p] \text{ et } JX = [p,-x]$$

et à l'opérateur A défini par $AX = [p,x]$, nous obtenons le résultat suivant :

Proposition 16.12 (Proposition 6.3, [19]). *Supposons que l'hypothèse* **(H4)** *soit vérifiée, que $\nabla_X H$ soit pseudo p.a. en t uniformément par rapport à $x \in X$ et k_*-lipschitzienne sur X. Alors l'équation* (16.10) *admet une et une seule solution x pseudo p.a.. Si de plus, $\nabla_X H_1$ désigne la composante p.a. de $\nabla_X H$, alors la composante p.a. (x_1,p_1) de (x,p) est l'unique solution p.a. de l'équation*

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1'(t) = \nabla_p H_1(t,x_1(t),p_1(t)) \\ p_1'(t) = -\nabla_x H_1(t,x_1(t),p_1(t)). \end{array} \right.$$

Quatrième partie 4. Solutions positives d'équations intégrales

Cette partie est consacrée à l'étude de l'existence de solutions positives et presque-périodiques (p.p.) d'équations intégrales ou différentielles avec un retard. Les principaux résultats des articles [13, 16, 18, 24] concernent aussi les solutions asymptotiquement p.p., pseudo p.p., presque-automorphes (p.a.) et pseudo p.a.. Les articles [13, 16, 18] sont écrits en collaboration avec E. Ait Dads et L. Lhachimi, [24] avec K. Ezzinbi.

17. Équation intégrale issue de modèles épidémiologiques

Dans [18], l'équation intégrale considérée est

$$x(t) = \gamma x(t-\tau) + (1-\gamma)\int_{t-\tau}^{t} f(s, x(s))\, ds \tag{17.1}$$

où $\tau > 0$ est un retard constant, $\gamma \in [0, 1[$ et $f : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ est une fonction continue. Cette équation intégrale est issue de modèles épidémiologiques, par exemple l'équation

$$x(t) = \int_{t-\tau}^{t} f(s, x(s))\, ds \tag{17.2}$$

modélise la proportion $x(t)$ d'une population infectée par un virus, en tenant compte de la durée de contagion τ de chaque individu infecté et de la proportion $f(t, x(t))$ des nouveaux individus infectés par unité de temps. Les résultats de [18] portent sur l'existence des solutions positives p.p.. Les solutions bornées, pseudo p.p., faiblement p.p. et asymptotiquement p.p. sont aussi traitées.

Les solutions positives de ces équations ont été abondamment étudiées, notamment la question de l'existence de solutions périodiques. Pour l'existence de solutions p.p., dans les publications précédant nos travaux, les auteurs imposent des hypothèses de monotonie sur l'application $x \mapsto f(t, x)$.

Pour commencer, citons un résultat de Ezzinbi et Hachimi [79] sur l'existence d'une solution p.p. et positive de l'équation (17.2).

(H1) L'application $f : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ est p.p. en t uniformément par rapport à $x \in [0, +\infty)$ (cf. la définition 3.3, p. 13) qui ne soit pas la fonction nulle.

(H2) L'application $x \mapsto f(t, x)$ est croissante sur $[0, +\infty)$.

(H3) Il existe une application continue $\phi : (0, 1) \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(\lambda) > \lambda$ pour $\lambda \in (0, 1)$. De plus pour tous $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in (0, 1)$ et $x > 0$, on a

$$\phi(\lambda) f(t, x) \leq f(t, \lambda x).$$

Théorème 17.1 (Ezzinbi et Hachimi, Theorem 2.1, [79])**.** *Si les hypothèses* **(H1)-(H3)** *sont vérifiées, alors il existe $\tau_1 > 0$ tel que pour $\tau \geq \tau_1$, l'équation* (17.2) *admet une et une seule solution x p.p. vérifiant*

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} x(t) > 0.$$

Pour s'affranchir de l'hypothèse de monotonie de l'application $x \mapsto f(t,x)$, Xu et Yuan [137] ont établi le résultat suivant pour l'équation (17.1) où $f = f_1 + f_2$ vérifie les hypothèses suivantes :

(H4) Les applications f_1 et $f_2 : \mathbb{R} \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ sont p.p. en t uniformément par rapport à $x \in [0,+\infty)$ et f_1 n'est pas la fonction nulle.

(H5) L'application $x \mapsto f_1(t,x)$ est croissante et l'application $x \mapsto f_2(t,x)$ est décroissante sur $[0,+\infty)$.

(H6) Il existe deux applications ϕ_1 et $\phi_2 : (0,1) \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ telles que $\phi_i(\lambda,x) > \lambda$ pour $\lambda \in (0,1)$ $(i = 1,2)$. L'application $x \mapsto \phi_1(\lambda,x)$ est croissante et $x \mapsto \phi_2(\lambda,x)$ est décroissante sur $[0,+\infty)$. De plus pour tous $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in (0,1)$ et $x > 0$, on a

$$\phi_1(\lambda,x)f_1(t,x) \leq f_1(t,\lambda x) \quad \text{et} \quad \phi_2(\lambda,x)f_2(t,x) \leq f_2(t,\frac{x}{\lambda}).$$

(H7) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\frac{f(t,x)}{x}\right| = 0.$

Théorème 17.2 (Xu et Yuan, Theorem 1, [137])**.** *Si les hypothèses* **(H4)-(H7)** *sont vérifiées, alors il existe $\tau_1 > 0$ tel que pour $\tau \geq \tau_1$, l'équation* (17.1) *admet une et une seule solution x p.p. vérifiant*

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} x(t) > 0.$$

De plus cette solution vérifie la formule des modules

$$mod(x) \subset mod(f)$$

(cf. la définition 7.5, p. 30).

Remarque 17.3. *L'hypothèse* **(H3)** *implique l'hypothèse* **(H7)***, ce qui montre que l'hypothèse* **(H7)** *est contenue implicitement dans le théorème 17.1 (cf. Remark 21,* [18]*). Le théorème 17.2 est une première généralisation du théorème 17.1, puisque les hypothèses* **(H1)-(H3)** *impliquent* **(H4)-(H7)** *avec $f_1 = f$, $f_2 = 0$, $\phi_1(\lambda,x) = \phi_2(\lambda,x) = \phi(\lambda)$ et l'équation concernée est* (17.1) *au lieu de* (17.2).

Pour s'affranchir de toute hypothèse de monotonie, au lieu d'utiliser les hypothèses **(H2)** et **(H3)** (resp. **(H5)** et **(H6)**), nous avons utilisé l'hypothèse suivante :

(H8) Pour tout $\varepsilon \in (0,1)$, il existe une application continue $\phi_\varepsilon : (0,1) \to \mathbb{R}$ telle que $\phi_\varepsilon(\lambda) > \lambda$ pour $\lambda \in (0,1)$. De plus pour tous $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in (0,1)$ et x, $y \in [\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}]$, on a

$$\lambda x \leq y \leq \frac{x}{\lambda} \implies \phi_\varepsilon(\lambda)f(t,x) \leq f(t,y).$$

Théorème 17.4 (Proposition 13, [18])**.** *Si les hypothèses* **(H1), (H7)** *et* **(H8)** *sont vérifiées, alors il existe $\tau_1 > 0$ tel que pour $\tau \geq \tau_1$, l'équation* (17.1) *admet une et une seule solution x p.p. telle que*

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} x(t) > 0.$$

De plus cette solution vérifie la formule des modules

$$mod(x) \subset mod(f).$$

Remarque 17.5. *Des résultats similaires au théorème 17.4 ont été aussi établis pour les solutions bornées (Corollary 12,* [18]*), périodiques (Corollary 14 et 15,* [18]*), pseudo p.p. (Proposition 17,* [18]*), faiblement p.p. (Proposition 19,* [18]*) et asymptotiquement p.p. (Proposition 20,* [18]*).*

Remarque 17.6. *Le théorème 17.4 est une généralisation des théorèmes 17.1 et 17.2. En effet le théorème 17.1 est un corollaire du théorème 17.2 (cf. la remarque 17.3) et les hypothèses* **(H4)-(H6)** *impliquent* **(H1)** *et* **(H8)** *avec* $f = f_1 + f_2$ *et* $\phi_\varepsilon(\lambda) = \min\left(\phi_1(\lambda,\varepsilon), \phi_2\left(\lambda, \frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$*. L'exemple suivant*

$$f(t,x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x}\sin^2 t & si\ 0 \le x \le 1 \\ \\ \frac{1}{1+x}\sin^2 t & si\ x \ge 1 \end{cases}$$

vérifie toutes les hypothèses du théorème 17.4, mais les théorèmes 17.1 et 17.2 ne permettent pas de conclure sur l'existence d'une solution positive et p.p. (Remark 22, [18]*). Pour cette raison le théorème 17.4 généralise et améliore les théorèmes 17.1 et 17.2.*

L'hypothèse **(H8)** n'impose pas que la fonction $x \mapsto f(t,x)$ soit monotone ou la somme de deux fonctions monotones, mais **(H8)** signifie que la fonction $x \mapsto f(t,x)$ n'est pas "trop fortement monotone". Plus précisément l'hypothèse **(H8)** implique que la fonction $x \mapsto xf(t,x)$ est croissante et que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}f(t,x)$ est décroissante sur $(0,+\infty)$ (cf. Lemma 23, [18]). Nous avons presque la réciproque si f est périodique ou si f est la somme de fonctions *à variables séparables*, plus précisément les deux exemples suivants vérifient l'hypothèse **(H8)** :

i) la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est périodique pour tout $x > 0$, l'application $x \mapsto xf(t,x)$ est strictement croissante et l'application $x \mapsto \frac{1}{x}f(t,x)$ est strictement décroissante sur $(0,+\infty)$ (cf. Corollary 15, [18]) ;

ii) $f(t,x) = \sum_{i=1}^{n} h_i(t)g_i(x)$ où $g_i(x) \ge 0$ et $h_i(x) \ge 0$ pour $x > 0$, $x \mapsto xg_i(x)$ sont strictement croissantes et $x \mapsto \frac{1}{x}g_i(x)$ sont strictement décroissantes sur $(0,+\infty)$, pour tout $i = 1, \cdots, n$.

Formulons l'hypothèse suivante :

(H9) Il existe une application continue $\phi : (0,1) \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(\lambda) > \lambda$ pour $\lambda \in (0,1)$ et pour tous $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in (0,1)$ et x, $y > 0$, on a

$$\lambda x \le y \le \frac{x}{\lambda} \implies \phi(\lambda)f(t,x) \le f(t,y).$$

Remarque 17.7. *Comme le montre l'exemple* $f(t,x) = 1 + x$*, l'hypothèse* **(H7)** *est une condition nécessaire pour obtenir l'existence d'une solution positive de l'équation* (17.2) *pour* $\tau \ge 1$ *(cf. Remark 11,* [18]*). L'hypothèse* **(H8)** *qui est plus fine que* **(H9)***, permet d'élargir la classe des fonctions* f *considérées, par exemple* $f(t,x) = h(t)g(x)$ *avec* h *une fonction p.p., positive et* $g(x) = \dfrac{x}{1+x}$ *vérifie l'hypothèse* **(H8)***, mais pas* **(H9)***. En effet,* *on peut prendre* $\phi_\varepsilon(\lambda) = \inf_{\varepsilon \le x \le \frac{1}{\varepsilon}} \dfrac{f(t,\lambda x)}{f(t,x)} = \lambda \dfrac{1+\varepsilon}{1+\lambda\varepsilon} > \lambda$, *tandis que* $\inf_{x>0} \dfrac{f(t,\lambda x)}{f(t,x)} = \lambda$, *ce qui montre que la fonction* f *ne vérifie pas* **(H9)**.

Pour établir le théorème 17.4, nous avons utilisé une distance projective définie à l'aide d'un cône sur un espace de Banach, développée par Thompson dans [134]. La distance définie par Thompson est légèrement différente de la distance projective usuelle. Les auteurs de [79] ont aussi utilisé ces notions pour démontrer le théorème 17.1, mais nous avons adapté cette démonstration pour éliminer toute hypothèse de monotonie sur la fonction $x \mapsto f(t,x)$. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Selon Thompson, une partie K de X est un *cône positif* si K est non-vide, convexe, fermée et vérifie

$$x \in K, \quad \alpha \ge 0 \implies \alpha x \in K,$$
$$x \text{ et } -x \in K \implies x = 0.$$

L'espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$ est partiellement ordonné par le cône positif K, si la relation d'ordre $\preceq$ sur X est définie par :

$$x \preceq y \quad \text{si et seulement si} \quad y - x \in K. \tag{17.3}$$

Ensuite, Thompson définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur $K^* = K - \{0\}$ par

$$x\mathcal{R}y \iff \exists \alpha \text{ et } \beta > 0 \text{ tels que } x \preceq \alpha y \text{ et } y \preceq \beta x.$$

Le cône positif K est dit *normal* s'il existe $\gamma > 0$ telle que

$$0 \preceq x \preceq y \implies \|x\| \le \gamma \|y\|.$$

Dans ce cas, si C est une classe d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}$, alors C est un espace métrique **complet** pour la distance définie par

$$d(x,y) = \ln(\max(\alpha_*, \beta_*)) \tag{17.4}$$

avec

$$\alpha_* = \inf\{\alpha > 0\,;\, x \preceq \alpha y\} \text{ et } \beta_* = \inf\{\beta > 0\,;\, y \preceq \beta x\} \tag{17.5}$$

(Thompson, Lemma 2 et 3, [134]).

Pour établir le théorème 17.4, l'espace de Banach choisi est $X = AP(\mathbb{R})$ (l'espace des fonctions p.p.) muni de la norme de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ et le cône normal est

$$K = \{x \in AP(\mathbb{R})\,;\, \forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) \ge 0\}.$$

La classe d'équivalence de la fonction constante et égale à 1, qui est aussi l'intérieur de K pour la norme de X :

$$K_0 = \left\{x \in AP(\mathbb{R})\,;\, \inf_{t\in\mathbb{R}} x(t) > 0\right\},$$

est un espace métrique complet pour la distance d définie par (17.4) et (17.5). La relation d'ordre $\preceq$ sur K_0, devient

$$x \preceq y \iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) \le y(t) \iff \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{x(t)}{y(t)} \le 1;$$

ainsi α_* et β_* définis par (17.5) sont égaux à

$$\alpha_* = \inf\left\{\alpha > 0\,;\, \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{x(t)}{y(t)} \le \alpha\right\} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{x(t)}{y(t)} \quad \text{et} \quad \beta_* = \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{y(t)}{x(t)},$$

donc la distance d définie sur K_0 par (17.4) est aussi égale à

$$d(x,y) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |\ln(x(t)) - \ln(y(t))| .$$

Pour $\varepsilon > 0$, considérons l'ensemble

$$K_\varepsilon = \left\{ x \in AP(\mathbb{R})\,;\, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon \leq x(t) \leq \frac{1}{\varepsilon} \right\}.$$

K_ε est une partie fermée de l'espace métrique complet (K_0, d). Pour simplifier l'exposé, dans un premier temps, nous considérons l'équation (17.2), pour cela nous notons

$$T(x)(t) = \int_{t-\tau}^{t} f(s, x(s))\, ds, \qquad \text{pour } t \in \mathbb{R} \text{ et } x \in AP(\mathbb{R}).$$

Il est démontré que si $x \in AP(\mathbb{R})$, alors $T(x) \in AP(\mathbb{R})$; puis pour $\tau > 0$ suffisamment grand et $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on obtient $T(K_\varepsilon) \subset K_\varepsilon$, ce qui permet de définir l'opérateur

$$T_\varepsilon : K_\varepsilon \to K_\varepsilon \quad \text{avec} \quad T_\varepsilon(x)(t) = \int_{t-\tau}^{t} f(s, x(s))\, ds.$$

Avec ces notations, le problème de l'existence d'une solution x p.p. de l'équation (17.2) vérifiant $\inf\limits_{t\in\mathbb{R}} x(t) > 0$ se ramène à l'étude de l'existence d'un point fixe de l'opérateur T_ε pour un $\varepsilon > 0$. Pour x et $y \in K_0$, la distance d est aussi égale à

$$d(x,y) = \ln\left(\frac{1}{\lambda_*}\right) \qquad \text{avec} \qquad \lambda_* = \sup\left\{ \lambda \in]0,1]\,;\, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda x(t) \leq y(t) \leq \frac{1}{\lambda} x(t) \right\},$$

ce qui permet de déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda_* x(t) \leq y(t) \leq \frac{1}{\lambda_*} x(t) \tag{17.6}$$

et que pour $0 < \lambda \leq 1$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda x(t) \leq y(t) \leq \frac{1}{\lambda} x(t) \implies d(x,y) \leq \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Pour x et $y \in K_\varepsilon$ vérifiant (17.6), l'hypothèse **(H8)** permet d'établir

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \phi(\lambda_*) T_\varepsilon(x)(t) \leq T_\varepsilon(y)(t) \leq \frac{1}{\phi(\lambda_*)} T_\varepsilon(x)(t),$$

ce qui implique

$$d(T_\varepsilon(x), T_\varepsilon(y)) \leq \ln\left(\frac{1}{\phi(\lambda_*)}\right) = -\ln\left(\phi\left(\mathrm{e}^{-d(x,y)}\right)\right),$$

donc

$$d(T_\varepsilon(x), T_\varepsilon(y)) \leq \Phi\left(d(x,y)\right)$$

avec

$$\Phi\left(r\right) = -\ln\left(\phi\left(\mathrm{e}^{-r}\right)\right).$$

Le théorème de point fixe suivant permet de conclure.

Théorème 17.8 (Theorem 17.4, p. 190, [75])**.** *Soit X un espace métrique complet. Soit $\Phi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ une application continue et croissante vérifiant $\Phi(0) = 0$ et $\Phi(r) < r$ pour tout $r > 0$. Si $T : X \to X$ est une application vérifiant*

$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad d(T(x), T(y)) \leq \Phi(d(x,y)),$$

alors T admet un et un seul point fixe.

Pour l'équation (17.1), nous avons considéré l'opérateur linéaire continue

$$L : AP(\mathbb{R}) \to AP(\mathbb{R}), \quad \text{avec} \quad Lx(t) = x(t) - \gamma x(t-\tau),$$

qui est inversible pour $0 \leq \gamma < 1$, avec

$$L^{-1}x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma^n x(t - n\tau),$$

puis nous avons utilisé le changement de variable $y = Lx$. Sous les hypothèses du théorème 17.4, ce changement de variable permet d'obtenir que $x \in K_0$ est une solution de l'équation (17.1) si et seulement si $y \in K_0$ est une solution de l'équation

$$y(t) = (1-\gamma) \int_{t-\tau}^{t} f(s, L^{-1}y(s))\, ds,$$

qui est similaire à l'équation (17.2).

18. Équation intégrale avec un retard infini

Dans [13, 16, 24], nous avons considéré l'équation intégrale

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} a(t, t-s) f(s, x(s))\; ds, \tag{18.1}$$

où $f : \mathbb{R} \times [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ est une fonction continue et $a : \mathbb{R} \times [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ est une fonction telle que l'application $s \mapsto a(t,s)$ soit positive et intégrable sur $(0,+\infty)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Dans [13], nous avons donné des conditions suffisantes pour l'existence de solutions positives qui sont presque-périodiques (p.p.) ou presque-automorphes (p.a.). Des résultats similaires ont été établis dans [16] et [24] pour les solutions respectivement pseudo presque-périodiques (pseudo p.p.) et pseudo presque-automorphes (pseudo p.a.).

Ait Dads et Ezzinbi ont donné des conditions suffisantes pour l'existence de solutions p.p. et positives (Theorem 1, [32]) pour l'équation

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} b(t-s) f(s, x(s))\; ds, \tag{18.2}$$

qui est un cas particulier de l'équation (18.1). Sur la fonction f, les auteurs imposent les mêmes hypothèses **(H1)-(H3)** que celles du théorème 17.1, p. 70, notamment que la fonction $x \mapsto f(t,x)$ soit croissante. Pour éviter des hypothèses de monotonie sur l'application $x \mapsto f(t,x)$, Xu et Yuan (Theorem 6, [138]) ont utilisé les mêmes hypothèses **(H4)-(H6)** que celles du théorème 17.2, p. 71, notamment que la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante. Xu et Yuan (Theorem 2, [138]) établissent des résultats similaires pour l'équation intégrale

$$x(t) = \int_{t-\tau(t)}^{t} f(s, x(s))\, ds \tag{18.3}$$

issue de modèles épidémiologiques où la durée de contagion $\tau(t)$ de chaque individu infecté dépend du temps, où $\tau : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ est une application continue.

Par le choix d'un noyau $a(t,s)$ approprié dans le produit de convolution (18.1), les équations (17.2), p. 70, (18.2) et (18.3) deviennent des cas particuliers de l'équation intégrale (18.1). Il en est de même pour l'équation différentielle avec un retard fini $\tau \geq 0$

$$x'(t) + \alpha(t)x(t) = f(t, x(t-\tau)), \tag{18.4}$$

où $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application continue. L'équation (18.2) est évidemment un cas particulier de l'équation (18.1). En définissant le noyau a par

$$a(t,s) = 1_{[0,\tau(t)]}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \in [0, \tau(t)] \\ \\ 0 & \text{si } s \notin [0, \tau(t)], \end{cases} \tag{18.5}$$

l'équation (18.1) est réduite à l'équation intégrale (18.3) ; et avec

$$a(t,s) = \exp\left(- \int_{t+\tau-s}^{t} \alpha(\xi)\, d\xi \right) 1_{[\tau,+\infty)}(s), \tag{18.6}$$

l'équation (18.1) devient l'équation différentielle (18.4), ce que nous expliquerons p. 81.

Les hypothèses du résultat d'existence d'une solution p.p. et positive de l'équation intégrale (18.1) sont :

(H1) L'application $f : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ est p.p. en t uniformément par rapport à $x \in [0, +\infty)$.

(H2) Il existe une application continue $\phi : (0,1) \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(\lambda) > \lambda$ pour $\lambda \in (0,1)$ et pour tous $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in (0,1)$ et x, $y > 0$, on a

$$\lambda x \leq y \leq \frac{x}{\lambda} \implies \phi(\lambda) f(t,x) \leq f(t,y)$$

(H3) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $s \mapsto a(t,s) \in L^1(0, +\infty)$ et l'application $t \mapsto a(t, \cdot)$ est p.p. : $[t \mapsto a(t, \cdot)] \in AP(L^1(0, +\infty))$.

(H4) Il existe $x_* > 0$ tel que

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} \int_0^{+\infty} a(t,s) f(t-s, x_*)\, ds > 0.$$

Théorème 18.1 (Theorem 5.1, [13]). *Si les hypothèses* **(H1)-(H4)** *sont vérifiées, alors l'équation* (18.1) *admet une et une seule solution x p.p. telle que*

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} x(t) > 0.$$

De plus cette solution vérifie la formule des modules

$$mod(x) \subset mod(f) + mod(\bar{a}),$$

où $\bar{a} : \mathbb{R} \to L^1(0, +\infty)$ est l'application définie par $\bar{a}(t) = [s \mapsto a(t,s)]$.

La démonstration du théorème 18.1 est analogue du théorème 17.4, p. 71, en utilisant l'espace métrique (K_0, d) avec

$$K_0 = \left\{ x \in AP(\mathbb{R})\, ;\, \inf_{t \in \mathbb{R}} x(t) > 0 \right\}$$

et

$$d(x,y) = \ln\left(\frac{1}{\lambda_*}\right) \quad \text{avec} \quad \lambda_* = \sup\left\{\lambda \in]0,1]\,;\, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda x(t) \leq y(t) \leq \frac{1}{\lambda}x(t)\right\}.$$

L'étude des solutions de l'équation (18.1) vérifiant $\inf_{t\in\mathbb{R}} x(t) > 0$ est ramenée à la recherche des points fixes de l'opérateur

$$T : K_0 \to K_0 \quad \text{avec} \quad T(x)(t) = \int_{-\infty}^{t} a(t, t-s) f(s, x(s))\, ds.$$

L'hypothèse **(H4)** a permis de montrer que si $x(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors $Tx(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc la stabilité de K_0 par l'opérateur $T : T(K_0) \subset K_0$. Dans le cas p.p., pour l'existence des solutions positives des équations (18.3) et (18.4), l'hypothèse **(H4)** disparaîtra. Contrairement au théorème 17.4, p. 71, l'ensemble

$$K_\varepsilon = \left\{x \in AP(\mathbb{R})\,;\, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon \leq x(t) \leq \frac{1}{\varepsilon}\right\}$$

($\varepsilon > 0$) n'a pas été utilisé pour l'équation (17.1), sinon cela nous aurait contraint d'imposer que la borne inférieure apparaissant dans l'hypothèse **(H4)** soit suffisamment grande ; ce qui aurait pour conséquence de rajouter des hypothèses sur les résultats concernant les équations (18.3) et (18.4).

Pour les solutions p.a. de l'équation (18.1), nous avons établi un résultat similaire au théorème 18.1. Contrairement aux fonctions p.p., la notion de module n'existe pas.

(H5) L'application $f : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ est p.a. en t uniformément par rapport à $x \in [0, +\infty)$ (cf. la définition 4.5 et le théorème 4.11, p. 21-22).

(H6) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $s \mapsto a(t,s) \in L^1(0, +\infty)$ et l'application $t \mapsto a(t,\cdot)$ est p.a. : $[t \mapsto a(t,\cdot)] \in AA(L^1(0,+\infty))$.

Théorème 18.2 (Theorem 4.1, [13])**.** *Si les hypothèses* **(H2)**, **(H4)**, **(H5)** *et* **(H6)** *sont vérifiées, alors l'équation* (18.1) *admet une et une seule solution x p.a. telle que*

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} x(t) > 0.$$

Pour les solutions pseudo p.p. de l'équation (18.1), nous avons établi un résultat similaire au théorème 18.1. Nous avons évidemment adapté les hypothèses au cas pseudo p.p., mais il a été nécessaire de rajouter une hypothèse sur la composante p.p. de la fonction pseudo p.p. : $t \mapsto a(t,\cdot)$.

(H7) L'application $f : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ est pseudo p.p. en t uniformément par rapport à $x \in [0, +\infty)$ et f^{ap} désigne la composante p.p. de f (cf. la définition 5.4 et la proposition 5.6, p. 23).

(H8) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $s \mapsto a(t,s) \in L^1(0,+\infty)$ et l'application $t \mapsto a(t,\cdot)$ est pseudo p.p. : $[t \mapsto a(t,\cdot)] \in PAP(L^1(0,+\infty))$ et $t \mapsto a^{ap}(t,\cdot)$ désigne la composante p.p. de $t \mapsto a(t,\cdot)$.

(H9) Il existe $b \in L^1(0,+\infty)$ telle que $|a^{ap}(t,s)| \leq b(s)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $s \in (0,+\infty)$.

Théorème 18.3 (Theorem 5.1, [16]). *Si les hypothèses* **(H2)**, **(H4)** *et* **(H7)-(H9)** *sont vérifiées, alors l'équation* (18.1) *admet une et une seule solution x pseudo p.p. telle que*

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} x(t) > 0.$$

De plus l'équation

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} a^{ap}(t, t-s) f^{ap}(s, y(s))\, ds$$

admet une et une seule solution y p.p. vérifiant

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} y(t) > 0,$$

qui est x^{ap} la composante p.p. de x. Cette solution x^{ap} vérifie la formule des modules

$$mod(x^{ap}) \subset mod(f^{ap}) + mod(\bar{a}^{ap}),$$

où $\bar{a} : \mathbb{R} \to L^1(0, +\infty)$ est l'application définie par $\bar{a}(t) = [s \mapsto a(t, s)]$ et $\bar{a}^{ap}$ est la composante p.p. de $\bar{a}$.

Le cas des solutions asymptotiquement p.p. a été traité dans (Theorem 6.1, [16]) et celui des solutions pseudo p.a. a été aussi traité dans (Theorem 3.1, [24]).

Maintenant, nous énonçons une conséquence du théorème 18.1 sur l'équation (18.3) issue de modèles épidémiologiques.

Proposition 18.4 (Proposition 5.3, [13]). *Si les hypothèses* **(H1)** *et* **(H2)** *sont vérifiées et si f n'est pas la fonction nulle, alors il existe $\tau_* > 0$ tel pour toute fonction τ p.p. vérifiant*

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} \tau(t) \geq \tau_*,$$

l'équation (18.3) *admet une et une seule solution x p.p. telle que*

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} x(t) > 0.$$

De plus cette solution vérifie la formule des modules

$$mod(x) \subset mod(f) + mod(\tau).$$

En choisissant le noyau a défini par (18.5), l'équation (18.1) est réduite à l'équation (18.3). Une étude du noyau considéré montre que le noyau a vérifie **(H3)** dès que la fonction $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est p.p.. L'hypothèse **(H4)** est vérifiée dès que la borne inférieure de τ est suffisamment grande. En effet les hypothèses permettent d'affirmer l'existence d'un nombre $x_* > 0$ telle que l'application $t \mapsto f(t, x_*)$ soit p.p., positive ou nulle qui ne soit pas l'application nulle ; ainsi sa moyenne temporelle est strictement positive : $\mathcal{M}\{f(t, x_*)\}_t > 0$, donc

$$\lim_{\tau\to+\infty} \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^{t} f(s, x_*)\, ds = \mathcal{M}\{f(t, x_*)\}_t > 0 \quad \text{(uniformément sur } \mathbb{R} \text{ par rapport à } t)$$

(cf. la remarque 7.4, p. 30). La limite uniforme précédente permet d'affirmer l'existence de $\tau_* > 0$ tel que

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} \int_{t-\tau_*}^{t} f(s, x_*)\, ds > 0$$

et l'inégalité suivante

$$\int_0^{+\infty} a(t,s) f(t-s,x_*)\,ds = \int_{t-\tau(t)}^{t} f(s,x_*)\,ds \geq \int_{t-\tau_*}^{t} f(s,x_*)\,ds$$

montre que l'hypothèse **(H4)** est vérifiée ; ainsi la proposition 18.4 est un corollaire du théorème 18.1. Pour les solutions p.a., nous avons établi un résultat similaire à la proposition 18.4. Pour les fonctions p.a., nous ne pouvons pas utiliser l'argument décrit ci-dessus pour établir l'hypothèse **(H4)**, pour cela nous avons établi un nouveau résultat sur les fonctions p.a..

Lemme 18.5 (Lemma 4.7, [13])**.** *Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application p.a. telle que $\phi \geq 0$. Si*

$$\forall r > 0, \qquad \inf_{t\in\mathbb{R}} \int_{t-r}^{t} \phi(s)\,ds = 0,$$

alors ϕ est la fonction nulle.

Proposition 18.6 (Proposition 4.3, [13])**.** *Si les hypothèses* **(H2)** *et* **(H5)** *sont vérifiées et si f n'est pas la fonction nulle, alors il existe $\tau_* > 0$ tel pour toute fonction τ p.a. vérifiant*

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} \tau(t) \geq \tau_*,$$

l'équation (18.3) *admet une et une seule solution x p.a. telle que*

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} x(t) > 0.$$

Pour les solutions pseudo p.p. de l'équation (18.3), nous avons aussi établi un résultat similaire à la proposition 18.6. Cependant, le lemme 18.5 n'est plus vérifié pour les fonctions pseudo p.p. ; pour cette raison, nous avons dû ajouter une hypothèse sur la fonction f pseudo p.p. pour que l'on ait l'existence d'un $x_* > 0$ tel que

$$\lim_{\tau\to+\infty} \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^{t} f(s,x_*)\,ds = l > 0 \quad \text{(uniformément sur } \mathbb{R} \text{ par rapport à } t).$$

Ici, nous énonçons une hypothèse plus forte et plus simple que celle qui est donnée dans l'article originale (Proposition 5.3, [16])

(H10) Il existe $x_* > 0$ tel que la fonction $t \mapsto f^{ap}(t,x_*)$ ne soit pas la fonction nulle et

$$\lim_{\tau\to+\infty} \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^{t} f^e(s,x_*)\,ds = 0 \quad \text{(uniformément sur } \mathbb{R} \text{ par rapport à } t)$$

où f^e désigne la perturbation ergodique de $t \mapsto f(t,x_*)$.

Par définition de la perturbation ergodique de f, la limite de l'hypothèse **(H10)** est toujours vérifiée simplement, mais pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Proposition 18.7 (Proposition 5.3, [16])**.** *Si les hypothèses* **(H2)**, **(H7)** *et* **(H10)** *sont vérifiées, alors il existe $\tau_* > 0$ tel que pour toute fonction τ pseudo p.p. vérifiant*

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} \tau(t) \geq \tau_*,$$

l'équation (18.3) *admet une et une seule solution x pseudo p.p. telle que*

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} x(t) > 0.$$

De plus en notant τ^{ap} la composante p.p. de τ, l'équation

$$y(t) = \int_{t-\tau^{ap}(t)}^{t} f^{ap}(s, y(s))\ ds$$

admet une et une seule solution y p.p. vérifiant

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} y(t) > 0,$$

qui est x^{ap} la composante p.p. de x. Cette solution x^{ap} vérifie la formule des modules

$$mod(x^{ap}) \subset mod(f^{ap}) + mod(\tau^{ap}).$$

Le cas des solutions asymptotiquement p.p. a été traité dans (Proposition 6.3, [16]) et celui des solutions pseudo p.a. a été aussi traité dans (Corollary 4.1, [24]).

Avant d'énoncer quelques résultats d'existence sur les solutions positives de l'équation semi-linéaire (18.4), rappelons quelques propriétés sur les solutions bornées de l'équation linéaire associée. L'équation linéaire homogène

$$x'(t) + \alpha(t)x(t) = 0 \tag{18.7}$$

est exponentiellement stable, s'il existe $M \geq 1$ et $\omega > 0$ tels que

$$\exp\left(-\int_{\sigma}^{t} \alpha(\xi)\ d\xi\right) \leq M\mathrm{e}^{-\omega(t-\sigma)}, \quad t \geq \sigma.$$

Dans ce cas, pour tout $p \in BC(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (continue et bornée sur $\mathbb{R}$), l'équation linéaire complète

$$x'(t) + \alpha(t)x(t) = p(t)$$

admet une unique solution $x \in BC(\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui est égale à

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\int_{\sigma}^{t} \alpha(\xi)\ d\xi\right) p(\sigma)\, d\sigma.$$

L'équation linéaire homogène (18.7) est exponentiellement stable si et seulement s'il existe $r_0 > 0$ tel que

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} \int_{t-r_0}^{t} \alpha(\xi)\, d\xi > 0 \tag{18.8}$$

(cf. Lemma 6.1, [13]).

Pour l'équation différentielle (18.4) avec un retard $\tau \geq 0$, formulons l'hypothèse suivante.

(H11) L'application $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est p.p. et $\mathcal{M}\{\alpha(t)\}_t > 0$.

Si une fonction vérifie l'hypothèse **(H11)**, elle n'est pas nécessairement positive, par exemple avec $\alpha(t) = \frac{1}{2} + \sin(t)$, on a

$$\mathcal{M}\{\alpha(t)\}_t = \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} \alpha(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(t)\, dt = \frac{1}{2} > 0.$$

Si l'hypothèse **(H11)** est vérifiée, nous obtenons

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{r} \int_{t-r}^{t} \alpha(\xi)\, d\xi = \mathcal{M}\{\alpha(t)\}_t > 0 \quad \text{(uniformément sur } \mathbb{R} \text{ par rapport à } t),$$

et alors la relation (18.8) est vérifiée, donc l'équation linéaire homogène (18.7) est exponentiellement stable.

Proposition 18.8 (Proposition 6.5, [13]). *Si les hypothèses* **(H1)**, **(H2)** *et* **(H11)** *sont vérifiées et si f n'est pas la fonction nulle, alors l'équation* (18.4) *admet une et une seule solution x p.p. telle que*

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} x(t) > 0.$$

De plus cette solution vérifie la formule des modules

$$mod(x) \subset mod(f) + mod(\alpha).$$

Ici, nous expliquons pourquoi l'équation différentielle (18.4) est un cas particulier de l'équation intégrale (18.1) avec le noyau a défini par (18.6). Si f vérifie l'hypothèse **(H1)** et si $x \in AP(\mathbb{R})$ (p.p.), alors $t \mapsto f(t, x(t)) \in AP(\mathbb{R})$, donc l'application $t \mapsto f(t, x(t))$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Si l'équation linéaire homogène (18.7) est exponentiellement stable et si $x \in AP(\mathbb{R})$, alors x est une solution de l'équation (18.4) si et seulement si

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\int_{\sigma}^{t} \alpha(\xi)\, d\xi\right) f(\sigma, x(\sigma-\tau))\, d\sigma. \tag{18.9}$$

Avec le changement de variable $s = \sigma - \tau$ l'équation (18.9) devient

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t-\tau} \exp\left(-\int_{s+\tau}^{t} \alpha(\xi)\, d\xi\right) f(s+\tau, x(s))\, ds,$$

ou encore

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\int_{s+\tau}^{t} \alpha(\xi)\, d\xi\right) 1_{[\tau,+\infty)}(t-s) f(s+\tau, x(s))\, ds,$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} a(t, t-s) f(s+\tau, x(s))\, ds.$$

Avec le noyau a défini par (18.6), l'équation intégrale (18.1) est réduite l'équation différentielle (18.4), donc la proposition 18.8 est un corollaire du théorème 18.1.

Pour les solutions p.a. de l'équation (18.4), nous avons établi un résultat similaire à la proposition 18.8.

(H12) L'application $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est p.a., $\alpha \geq 0$ et α n'est pas la fonction nulle.

Proposition 18.9 (Proposition 6.2, [13]). *Si les hypothèses* **(H2)**, **(H5)** *et* **(H12)** *sont vérifiées et si f n'est pas la fonction nulle, alors l'équation* (18.4) *admet une et une seule solution x p.a. telle que*

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} x(t) > 0.$$

Pour les solutions pseudo p.p. de l'équation (18.4), nous aussi avons établi un résultat similaire à la proposition 18.9.

(H13) L'application $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est pseudo p.a. et il existe $r_0 > 0$ tel que

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} \int_{t-r_0}^{t} \alpha(\xi)\, d\xi > 0.$$

(H14) Il existe $x_* > 0$ et $r_0 > 0$ tels que

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} \int_{t-r_0}^{t} f(s, x_*)\, d\xi > 0.$$

Proposition 18.10 (Proposition 7.2, [16])**.** *Si les hypothèses* **(H2)**, **(H7)**, **(H13)** *et* **(H14)** *sont vérifiées, alors l'équation* (18.4) *admet une et une seule solution x pseudo p.p. telle que*

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} x(t) > 0.$$

De plus en notant α^{ap} la composante p.p. de α, l'équation

$$y'(t) + \alpha^{ap}(t)y(t) = f^{ap}(t, y(t-\tau))$$

admet une et une seule solution y p.p. vérifiant

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} y(t) > 0,$$

qui est x^{ap} la composante p.p. de x. Cette solution x^{ap} vérifie la formule des modules

$$mod(x^{ap}) \subset mod(f^{ap}) + mod(\alpha^{ap}).$$

Le cas des solutions asymptotiquement p.p. a été traité dans (Proposition 7.6, [16]) et celui des solutions pseudo p.a. a été aussi traité dans (Proposition 4.4, [24]).

Références

Les articles précédés de * sont présentés dans ce mémoire.

[1] **P. Cieutat**, *Un principe variationnel pour une équation d'évolution parabolique*, C.R. Math. Acad. Sci. Paris **318** (1994), 995-998.

[2] J. Blot, **P. Cieutat**, J. Mawhin, *Almost-periodic oscillations of monotone second-order systems*, Adv. Differential Equations **2** (1997), 693-714.

[3] **P. Cieutat**, A. Haraux, *Exponential decay and existence of almost periodic solutions for some linear forced differential equations*, Port. Math. (NS) **59** (2002), 141-159.

[4] * **P. Cieutat**, *Bounded and almost periodic solutions of convex Lagrangian systems*, J. Differential Equations **190** (2003), 108-130.

[5] * **P. Cieutat**, *Almost periodic solutions of second-order systems with monotone fields on a compact subset*, Nonlinear Anal. **53** (2003), 751-763.

[6] * **P. Cieutat**, *Maximum principle and existence of almost-periodic solutions of second-order differential systems*, Differential Integral Equations **17** (2004), 921-942.

[7] * **P. Cieutat**, On the structure of the set of bounded solutions on an almost periodic Liénard equation, Nonlinear Anal. **58** (2004), 885-898.

[8] * **P. Cieutat**, *Almost periodic solutions of forced vectorial Liénard equations*, J. Differential Equations **209** (2005), 302-328.

[9] * **P. Cieutat**, *Necessary and sufficient conditions for existence and uniqueness of bounded or almost-periodic solutions for differential systems with convex potential*, Differential Integral Equations **18** (2005), 361-378.

[10] * E. Ait Dads, **P. Cieutat**, L. Lhachimi, *Structure of the set of bounded solutions and existence of pseudo almost-periodic solutions of a Liénard equation*, Differential Integral Equations **20** (2007), 793-813.

[11] * E. Ait Dads, **P. Cieutat**, K. Ezzinbi, *The existence of pseudo-almost periodic solutions for some nonlinear differential equations in Banach spaces*, Nonlinear Anal. **69** (2008), 1325-1342.

[12] * **P. Cieutat**, S. Fatajou, G.M. N'Guérékata, *Bounded and almost automorphic solutions of a Liénard equation with a singular nonlinearity*, E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ. **21** (2008), 1-15.

[13] * E. Ait Dads, **P. Cieutat**, L. Lhachimi, *Positive almost automorphic solutions for some nonlinear infinite delay integral equations*, Dynam. Systems and Appl. **17** (2008), 515-538.

[14] * J. Blot, **P. Cieutat**, G.M. N'Guérékata, D. Pennequin, *Superposition operators between various almost periodic function spaces and applications*, Commun. Math. Anal. **6** (2009), 42-70.

[15] * **P. Cieutat**, S. Fatajou, G.M. N'Guérékata, *Bounded and almost automorphic solutions of some nonlinear differential equation in Banach spaces*, Nonlinear Anal. **71** (2009), 674-684.

[16] * E. Ait Dads, **P. Cieutat**, L. Lhachimi, *Positive pseudo almost periodic solutions for some nonlinear infinite delay integral equations*, Math. Comput. Modelling **49** (2009), 721-739.

[17] * **P. Cieutat**, K. Ezzinbi, *Existence, uniqueness and attractiveness of a pseudo almost automorphic solutions for some dissipative differential equations in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **354** (2009), 494-506.

[18] * E. Ait Dads, **P. Cieutat**, L. Lhachimi, *Existence of positive almost periodic or ergodic solutions for some neutral nonlinear integral equations*, Differential Integral Equations **22** (2009), 1075-1096.

[19] * E. Ait Dads, **P. Cieutat**, S. Fatajou, *Pseudo almost automorphic solutions for some nonlinear differential equations : Liénard equations and Hamiltonian systems*, Int. J. Evol. Equ. **4** (2010), 191-211.

[20] * **P. Cieutat**, S. Fatajou, G.M. N'Guérékata, *Composition of pseudo almost periodic and pseudo almost automorphic functions and applications to evolution equations*, Appl. Anal. **89** (2010), 11-27.

[21] * J. Blot, **P. Cieutat**, G.M. N'Guérékata, *Dependence results on almost periodic and almost automorphic solutions of evolution equations*, Electron. J. Diff. Equ. **101** (2010), 1-13.

[22] * **P. Cieutat**, K. Ezzinbi, *Almost automorphic solutions for some evolution equations through the minimizing for some subvariant functional, applications to heat and wave equations with nonlinearities*, J. Funct. Anal. **260** (2011), 2598-2634.

[23] * M. Ayachi, J. Blot, **P. Cieutat**, *Almost periodic solutions of monotone second-order differential equations*, Adv. Nonlinear Stud. **11** (2011), 541-554.

[24] * **P. Cieutat**, K. Ezzinbi, *Positive pseudo almost automorphic solutions for some nonlinear infinite delay integral equations*, Afr. Diaspora J. Math. **12** (2011), 19-33.

[25] J. Blot, **P. Cieutat**, G.M. N'Guerekata, *S-asymptotically ω-periodic functions and applications to evolution equations*, Afr. Diaspora J. Math. **12** (2011), 113-121.

[26] J. Blot, **P. Cieutat**, K. Ezzinbi, *Measure theory and pseudo almost automorphic functions, new developments and applications*, Nonlinear Anal. **75** (2012), 2426-2447.

[27] J. Blot, **P. Cieutat**, K. Ezzinbi, *New approach for weighted pseudo-almost periodic functions under the light of measure theory, basic theory and applications*, Appl. Anal. (2013), 493-526.

[28] J. Blot, S. Boudjema, **P. Cieutat**, *Several kinds of oscillations in forced Liénard equations*, Bound. Value Probl. (2013), 2013 :66, 11 pp.

[29] J. Blot, S. Boudjema, **P. Cieutat**, *Dependence results for S-asymptotically periodic solutions of evolution equations*, Nonlinear Stud. **20** (2013), 295-307.

[30] J. Blot, C. Buşe, **P. Cieutat**, *Local attractivity in nonautonomous semilinear evolution equations*, Nonauton. Dyn. Syst. **1** (2014), 72-82.

Autres références

[31] P. Acquistapace, B. Terrini, *A unified approach to abstract linear nonautonomous parabolic equations*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **78** (1987), 47-107.

[32] E. Ait Dads, K. Ezzinbi, *Existence of positive pseudo-almost-periodic solution for some nonlinear infinite delay integral equations arising in epidemic problems*, Nonlinear Anal. **41** (2000), 1-13.

[33] L. Amerio, *Soluzioni quasi-periodiche, o limitate, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitate*, Ann. Mat. Pura Appl. **39** (1955), 97-119.

[34] L. Amerio, *Problema misto e soluzioni quasi-periodiche dell'equazione delle onde*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **30** (1960), 197-222.

[35] L. Amerio, *Problema misto e quasi-periodicità per l'equazione delle onde non omogenea*, Ann. Mat. Pura Appl. **49** (1960), 393-417.

[36] L. Amerio, *Almost periodic solutions of the equation of Schrödinger type*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. CI. Sci. Fis. Mat. Natur. VIII **43** (1967), 147-153.

[37] L. Amerio, *Almost periodic solutions of the equation of Schrödinger type*, II, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. CI. Sci. Fis. Mat. Natur. VIII **43** (1967), 265-270.

[38] L. Amerio, *Almost-periodic functions in Banach spaces.* The Harald Bohr Century Copenhagen, 1987, Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk. **42** (1989), 25-33.

[39] L. Amerio, G. Prouse, *Almost periodic functions and functional equations*, Van Nostrand Reinhold Comp., New York, 1971.

[40] H. Anzai, S. Kakutani, *Bohr compactifications of a locally compact Abelian group. I*, Proc. Imp. Acad. Tokyo **19** (1943), 476-480.

[41] H. Anzai, S. Kakutani, *Bohr compactifications of a locally compact Abelian group. II*, Proc. Imp. Acad. Tokyo **19** (1943), 533-539.

[42] B. Aulbach, N. Van Minh, *Almost periodic mild solutions of a class of partial functional differential equations*, Abstr. Appl. Anal. **3** (1998), 425-436.

[43] M.S. Berger, Y.Y. Chen, *Forced quasiperiodic and almost periodic solution for nonlinear systems*, Nonlinear Anal., **21** (1993), 949-965.

[44] A. S. Besicovitch, *Almost periodic functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1932.

[45] M. Biroli, *On the almost periodic solution to some parabolic quasivariational inequalities*, Riv. Mat. Univ. Parma IV **5** (1) (1979), 295-303.

[46] M. Biroli, F. Dal Fabbro, *Bounded or almost periodic solutions of a wave equation with nonlinear viscosity*, Differential Equations, Colorado Springs, CO, 1989, in : Lect. Notes Pure and Appl. Math., vol. 127, Dekker, New York, 1991, pp. 47-52.

[47] M. Biroli, A. Haraux, *Asymptotic behavior of an almost periodic, strongly dissipative wave equations*, J. Differential Equations **38** (1980), 422-440.

[48] J. Blot, *Calculus of variations in mean and convex Lagrangians*, J. Math. Anal. Appl. **134** (1988), 312-321.

[49] J. Blot, *Calculus of variations in mean and convex Lagrangians II*, Bull. Austral. Math. Soc. **40** (1989), 457-463.

[50] J. Blot, *Calculus of variations in mean and convex Lagrangians III*, Israel J. Math. **67** (1989), 337-344.

[51] J. Blot, *Calculus of variations in mean and convex Lagrangians IV*, Rech. Math. **XL** (1991), 3-18.

[52] J. Blot, *Oscillations presque-périodiques forcées d'équations d'Euler-Lagrange*, Bull. Soc. Math. France **122** (1994), 285-304.

[53] S. Bochner, *A new approach to almost periodicity*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **48** (1962), 2039-2043.

[54] S. Bochner, *Continuous mappings of almost automorphic and almost periodic functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **52** (1964), 907-910.

[55] S. Bochner, J. Von Neumann, *Almost periodic functions in a group. II*, Trans. Amer. Math. Soc. **37** (1935), 21-50.

[56] P. Bohl, *Uber die darstellung von funktionen einer variabeln durch trigonometrische reihen mit mehreren einer variabeln proportionalen Argumenten*, Thèse de l'université de Tartu, 1893.

[57] H. Bohr, *Zur theorie der fast periodischen funktionen I. Eine verallgemeinerung der theorie der fourierreihen*, Acta Math. **45** (1925), 29-127.

[58] H. Bohr, *Zur Theorie der Fastperiodischen Funktionen II. Zusammenhang der fastperiodischen Funktionen mit Funktionen von unendlich vielen Variabeln ; gleichmässige Approximation durch trigonometrische Summen*, Acta Math. **46** (1925), 101-214.

[59] H. Bohr, *Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen III. Dirichletentwicklung analytischer Funktionen*, Acta Math. 47 (1926), 237-281.

[60] H. Bohr, *Almost periodic functions*, Springer, Berlin, 1933.

[61] H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[62] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.

[63] J. Campos, P.J. Torres, *On the structure of the set of bounded solutions on a periodic Liénard equation*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 1453-1462.

[64] C. Carminati, *Forced systems with almost periodic and quasiperiodic forcing term*, Nonlinear Anal., **32** (1998), 727-739.

[65] T. Carabello, D. Cheban, *Levitan/Bohr almost periodic and almost automorphic solutions of second order monotone differential equations*, J. Differential Equations **251** (2011), 708-727.

[66] T. Carabello, D. Cheban, *Almost periodic and asymptotically almost periodic solutions of Liénard equations*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **16** (2011), 703-711.

[67] T. Cazenave, A. Haraux *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires*, Ellipses-Edition, Paris, 1990.

[68] D. Cheban, *Levitan almost periodic and almost automorphic solutions of V-monotone differential equations*, J. Dynam. Differential Equations **20** (2008), 669-697.

[69] D. Cheban, *Asymptotically almost periodic solutions of differential equations*, Hindawi Publishing Corporation, New York, 2009.

[70] C. Corduneanu, *Almost periodic functions*, Wiley, New York, 1968 ; reprinted by Chelsea, New York, 1989.

[71] C. Corduneanu, *Almost periodic oscillations and waves*, Springer, New York, 2009.

[72] C.M. Dafermos, *Almost periodic process and almost periodic solutions of evolution equations*, in : Dynamical Systems, Proceedings of a University of Florida, International Symposium, Academic Press, 1977.

[73] T. Diagana, *Pseudo almost periodic functions in Banach spaces*, Nova Science Publishers Inc., New York, 2007.

[74] T. Diagana, *Almost automorphic type and almost periodic type functions in abstract spaces*, Springer, Cham, 2013.

[75] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[76] H-S. Ding, W. Long, G. N'Guérékata, *Almost automorphic solutions of nonautonomous evolution equations*, Nonlinear Anal. **70** (2009), 4158-4164.

[77] E. Esclangon, *Les fonctions quasi-périodiques*, Thèse de la faculté des Sciences de Paris, Gauthier-Villars, Paris, 1904.

[78] E. Esclangon, *Nouvelles recherches sur les fonctions quasi-périodiques, Annales de l'observatoire de Bordeaux*, Gauthier-Villars, Paris, 1919.

[79] K. Ezzinbi, M.A. Hachimi, *Existence of positive almost periodic solutions of functional equations via Hilbert's projective metric*, Nonlinear Anal. **26** (1996), 1169-1176.

[80] J. Favard, *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients presque-périodiques*, Acta Math. **51** (1928), 31-51.

[81] J. Favard, *Leçons sur les fonctions presque-périodiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1933.

[82] J. Favard, *Sur certains systèmes différentiels scalaires linéaires et homogènes à coefficients presque-périodiques*, Ann. Mat. Pura Appl. **61** (1963), 297-316.

[83] A.M. Fink, *Almost automorphic and almost periodic solutions which minimize functional*, Tôhoku Math. J. **20** (1968), 323-332.

[84] A.M. Fink, *Almost periodic differential equations*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 377, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974.

[85] M. Fréchet, *Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques continues*, C.R. Math. Acad. Sci. Paris, **213** (1941), 520-522.

[86] M. Fréchet, *Sur le théorème ergodique de Birkhoff*, C.R. Math. Acad. Sci. Paris, **213** (1941), 607-609.

[87] R.E. Gaines, J.K. Peterson, *Periodic solutions to differential inclusions*, Nonlinear Anal. **5** (1981), 1109-1131.

[88] A. Haraux, *Nonlinear Evolution Equations-Global Behavior of Solutions*, Lecture Notes in Math., vol. 841, Springer-Verlag, 1981.

[89] A. Haraux, *Damping out of transient states for some semilinear, quasiautonomous systems of hyperbolic type*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. **7** (1983), 89-136.

[90] A. Haraux, *Asymptotic behavior of trajectories for some nonautonomous, almost periodic processes*, J. Differential Equations **49** (1983), 473-483.

[91] A. Haraux, *Almost periodic forcing for a wave equations with a nonlinear local damping term*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A **94** (1983), 195-212.

[92] A. Haraux, *Asymptotic behavior of two-dimensional quasi-autonomous almost periodic evolutions equations*, J. Differential Equations **66** (1987), 62-70.

[93] A. Haraux, *Systèmes dynamiques dissipatifs et applications*, Masson, Paris, 1991.

[94] Y. Hino, T. Naito, N.V. Minh, J.S. Shin, *Almost periodic solutions of differential equations in Banach spaces*, Taylor and Francis, London, 2002.

[95] H. Ishii, *On the existence of almost periodic trajectories for contractive almost periodic processes*, J. Differential Equations **43** (1983), 66-72.

[96] H. Li, F. Huang, J. Li, *Composition of pseudo almost-periodic functions and semilinear differential equations*, J. Math. Anal. Appl. **255** (2001), 436-446.

[97] M.A. Krasnosel'skii, *Functional analysis and topology in non-linear problems of differential and integral equations*, 1963, Proc. 4th All-Union Math. Congr. (Leningrad, 1961), Vol. I pp. 120-133, Izdat. Akad. Nauk SSSR, Leningrad.

[98] M.A. Krasnosel'skii, *On certain new methods in the theory of periodic solutions of ordinary differential equations*, Proc. Second All-Union Congress on Theoretical and Appl. Mechanics, 1964, Vol. 1, Survey Reports, Nauka, Moscow.

[99] M.A. Krasnosel'skii, A.I. Perov, *On a certain principle of existence of bounded, periodic and almost periodic solutions of systems of ordinary differential equations*, 1958, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 123, pp. 235-238.

[100] M.A. Krasnosel'skii, A. Perov, *Some criteria for the existence of periodic solutions of a system of ordinary differential equations*, Proc. Internat. Sympos. Nonlinear Vibrations, Vol. II, Izdat. Akad. Nauk. Ukrain. SSSR. Kiev, 1961, pp. 202-211.

[101] M.A. Krasnosel'skii, V.V. Strygin, *Some criteria for the existence of periodic solutions of ordinary differential equations*, 1964, Dokl. Akad. Nauk SSSR 156, pp. 1022-1024.

[102] M.A. Krasnosel'skii, P.P. Zabreiko, *Geometrical methods of nonlinear analysis*, Springer, Berlin, 1984.

[103] B.M. Levitan, V.V. Zhikov, *Almost periodic functions and differential equations*, English Edition, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1982.

[104] J. Liang, J. Zhang, T.J. Xiao, *Composition of pseudo almost automorphic and asymptotically almost automorphic functions*, J. Math. Anal. **340** (2008), 1493-1499.

[105] P. Martínez-Amores, P.J. Torres, *Dynamics of a periodic differential equation with a singular nonlinearity of attractive type*, J. Math. Anal. Appl. **202** (1996), 1027-1039.

[106] J.L. Massera, *The existence of periodic solutions of systems of differential equations*, Duke Math. J. **17** (1950), 457-475.

[107] J. Mawhin, *Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems*, CBMS Regional Conf. no. 40, Amer. Math. Soc., Providence, 1979.

[108] J. Mawhin, *Bounded and almost periodic solutions of nonlinear differential equations : variational vs nonvariational approach*, Calculus of variations and differential equations (Haifa, 1998), 167-184, Chapman & Hall/CRC Res. Notes Math., 410, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2000.

[109] G. N'Guérékata, *Almost automorphic and almost periodic functions in abstract spaces*, Kluwer Academic Publishers, New- York, 2001.

[110] G. N'Guérékata, *Topics in Almost Automorphy*, Springer-Verlag, New York, 2005.

[111] Z. Opial, *Sur les intégrales bornées de l'équation $u'' = f(t, u, u')$*, Ann. Polon. Math. **4** (1958), 314-324.

[112] Z. Opial, *Sur les solutions presque-périodiques des équations différentielles du premier ordre et du second ordre*, Ann. Polon. Math. **7** (1959), 51-61.

[113] Z. Opial, *Sur les solutions presque-périodiques d'une classe d'équations différentielles*, Ann. Polon. Math. **9** (1960), 157-181.

[114] Z. Opial, *Sur une équation différentielles presque-périodiques sans solution presque-périodique*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronon. Phys. **9** (1961), 673-676.

[115] R. Ortega, M. Tarallo, *Almost periodic upper and lower solutions*, J. Differential Equations **193** (2003), 343-358.

[116] R. Ortega, *Degree theory and almost periodic problems. Differential equations, chaos and variational problems*, 345-356, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 75, Birkhäuser, Basel, 2008.

[117] A. Pankov, *Bounded and almost periodic solutions of nonlinear operator differential equations*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1990.

[118] A.I. Perov, *Periodic, almost-periodic, and bounded solutions of the differential equation $dx/dt = f(t, x)$*, Soviet Math. Dokl. **1** (1960), 605-608.

[119] L.S. Pontryagin *Topological Groups*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1986.

[120] G. Prouse, *Soluzioni quasi-periodiche dell'equazione differenziale di Navier-Stokes in due dimensioni*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **33** (1963), 186-212.

[121] G. Prouse, *Soluzioni quasi-periodiche dell'equazione non omogenea della membrana vibrante, con termine dissipativo quadratico*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **37** (1964), 364-370.

[122] R.T. Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton University Press, New York, 1970.

[123] R.T. Rockafellar, *Generalized Hamiltonian equations for convex problems of Lagrange*, Pacific. J. Math. **33** (1970) 411-427.

[124] R.T. Rockafellar, *Saddle points of Hamiltonian systems in convex problems of Lagrange*, J. Optimization Theory Appl. **12** (1973), 367-390.

[125] R.T. Rockafellar, *Hamiltonian trajectories and saddle points in mathematical economics*, Control Cybernet. **38** (2009), 1575-1588.

[126] N. Rouche, J. Mawhin, *Equations différentielles ordinaires*, Tome 2 : *Stabilité et solutions périodiques*, Masson, Paris, 1973.

[127] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[128] L. Schwartz, *Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Hermann, Paris, 1976.

[129] R. Showalter, *Monotone operators in Banach space and Nonlinear Partial Differential Equations*, Mathematical Surveys and Monographs, 49, AMS, Providence, 1997.

[130] V. E. Slyusarchuk, *Necessary and sufficient conditions for existence and uniqueness of bounded and almost-periodic solutions of nonlinear differential equations*, Acta Appl. Math. **65** (2001), 333-341.

[131] S.L. Sobolev, *Sur la presque périodicité des solutions de l'équation des ondes. I*, C.R. (Doklady) Acad. Sci. URSS **48** (1945) 542-545.

[132] S.L. Sobolev, *Sur la presque périodicité des solutions de l'équation des ondes. II*, C.R. (Doklady) Acad. Sci. URSS **48** (1945) 618-620.

[133] S.L. Sobolev, *Sur la presque périodicité des solutions de l'équation des ondes. III*, C.R. (Doklady) Acad. Sci. URSS **49** (1945) 12-15.

[134] A.C. Thompson, *On certain contraction mappings in a partially ordered vector space*, Proc. Amer. Math. Soc. **14** (1963), 438-443.

[135] J. Von Neumann, *Almost periodic functions in a group. I*, Trans. Amer. Math. Soc. **36** (1934), 445-492.

[136] A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Hermann, Paris, 1940.

[137] B. Xu, R. Yuan, *The existence of positive almost periodic type solutions for some neutral nonlinear integral equation*, Nonlinear Anal. **60** (2005), 669-684.

[138] B. Xu, R. Yuan, *On the positive almost periodic type solutions for some nonlinear delay integral equations*, J. Math. Anal. Appl. **304** (2005), 249-268.

[139] T. Yoshizawa, *Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions*, Springer, New york, 1975.

[140] S. Zaidman, *Almost-periodic functions in abstract spaces*, Res. Notes Math., vol. 126, Pitman, Boston, 1985.

[141] S.F. Zakharin, I.O. Parasyuk, *Generalized and classical almost periodic solutions of Lagrangian systems*, Funkcialaj Ekvacioj. **42** (1999), 325-338.

[142] C. Zhang, *Pseudo almost periodic solutions of differential equations*, J. Math. Anal. **181** (1994), 62-76.

[143] C. Zhang, *Pseudo almost periodic solutions of differential equations. II*, J. Math. Anal. **192** (1995), 542-561.

[144] C. Zhang, *Almost periodic type functions and ergodicity*, Science Press, Beijing ; Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.

Résumé

Contributions aux oscillations presque-périodiques d'équations d'évolution.

Ce mémoire est consacré à l'étude des solutions presque-périodiques d'équations différentielles ordinaires, d'équations aux dérivées partielles ou d'équations intégrales non autonomes.

La première partie porte sur l'étude des opérateurs de superposition entre divers espaces de fonctions presque-périodiques, puis sur l'application de ces résultats pour obtenir des conditions d'existence, de dépendance continue ou différentiable des solutions presque-périodiques d'équations d'évolution dépendant d'un paramètre.

La deuxième partie est consacrée à la description des solutions bornées ou presque-périodiques, et sur des résultats d'existence de solutions presque-périodiques d'équations différentielles ordinaires non linéaires (équations d'Euler-Lagrange et des équations du second ordre, notamment des équations de Liénard).

Les résultats de la troisième partie sont essentiellement des conditions suffisantes pour l'existence de solutions presque-automorphes ou pseudo presque-automorphes. Pour les solutions presque-automorphes, la principale condition suffisante est l'existence et l'unicité d'une solution à valeurs dans un compact qui minimise une fonctionnelle.

Enfin, la quatrième partie est consacrée à l'existence de solutions positives et presque-périodiques d'équations intégrales ou différentielles avec un retard issue de modèles épidémiologiques.

Abstract

Contributions to almost periodic oscillations of evolution equations.

This dissertation is devoted to the study of almost periodic solutions of non-autonomous ordinary differential equations, partial differential equations or integral equations.

The first part focuses on the study of superposition operators between various spaces of almost periodic functions and the application of these results to obtain conditions of existence, continuous dependence or differentiable of almost periodic solutions of evolution equations depending on a parameter .

The second part is devoted to the description of bounded or almost periodic solutions and some results of existence of almost periodic solutions of nonlinear ordinary differential equations (Euler-Lagrange and second-order equations including Liénard equations).

The results of the third part are essentially sufficient conditions for the existence of almost automorphic or pseudo almost automorphic solutions. For almost automorphic solutions, the main sufficient condition is the existence and uniqueness of some solutions with values in a compact set which minimize a functional.

The fourth part is devoted to the existence of positive and almost periodic solutions of delay integrals equations or delay differential equations resulting from epidemiological models.