

## Exercices de colle

**Exercice 1** - Montrer que tout ouvert de  $\mathbb{R}^2$  est réunion dénombrable de boules ouvertes.

**Exercice 2** - Montrer que

$$\|f\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$$

sont deux normes sur  $C([0, 1], \mathbb{R})$ . Sont-elles équivalentes ?

Ou bien :

Trouver un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel  $E$  et deux normes  $|\cdot|$  et  $\|\cdot\|$  définies sur ce même espace de sorte que l'application identité de  $E$  ne soit pas continue de  $(E, |\cdot|)$  dans  $(E, \|\cdot\|)$ .

**Exercice 3** - Soit  $E$  un evn et soient  $X$  et  $Y$  deux sous-ensembles de  $E$ . On note  $X + Y = \{x + y, (x, y) \in X \times Y\}$ . Montrer que

1.  $X + Y$  est ouvert si  $X$  est ouvert.
2.  $X + Y$  est compact si  $X$  et  $Y$  sont compacts.
3.  $X + Y$  est fermé si  $X$  est compact et  $Y$  fermé.

Que peut-on dire de  $X + Y$  si  $X$  et  $Y$  sont seulement fermés ?

**Exercice 4** - Soit  $A$  un sous-ensemble non vide d'un e.v.n.  $(E, \|\cdot\|)$ . Pour tout  $x \in E$  on définit  $d(x, A) := \inf\{\|x - y\|, y \in A\}$ . Montrer que  $x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0$ .

**Exercice 5** - Soit  $F$  un sous-espace vectoriel d'un e.v.n.  $(E, \|\cdot\|)$ . Montrer que l'adhérence  $\overline{F}$  de  $F$  est aussi un sous-espace vectoriel de  $E$ . Que peut-on dire de l'intérieur  $\overset{\circ}{F}$  de  $F$  ?

**Exercice 6** - Soit  $T$  l'application linéaire de  $E$  dans  $E$  définie par

$$\forall x \in [0, 1], \quad T(f)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Montrer que  $T : (E, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (E, \|\cdot\|_1)$  est continue et calculer sa norme.

**Exercice 7** - On considère  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  l'espace des fonctions continues sur  $[0, 1]$  que l'on munit de la norme  $\|\cdot\|_1$ . Soit  $L : E \rightarrow E$  l'application linéaire définie par  $L(u)(t) = tu(t)$ .

1. Montrer que  $L \in \mathcal{L}(E, E)$  et que  $\|L\| \leq 1$ .
2. En s'aidant de la suite  $u_n(t) = (n+1)t^n$ , montrer que  $\|L\| = 1$ .
3. Enfin prouver qu'il n'existe pas de  $u \neq 0$  tel que  $\|L(u)\| = \|u\|$ .