

Exercices typiques de colle

Exercice 1 - Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est connexe.

Exercice 2 - Construire une suite réelle bornée telle que sa moyenne de Cesàro ne converge pas.

Exercice 3 - On considère l'ensemble $A := \{x > 0, \sin(1/x) = 0\}$. Cet ensemble est-il fermé, ouvert ? Quels sont ses points d'adhérence, d'accumulation ? Quel est son intérieur, son adhérence, sa frontière ?

Exercice 4 - Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire de l'ensemble $A := \{x \in \mathbb{R}, f(x) \geq a\}$? Et si on ne suppose plus f continue ?

Exercice 5 - Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et surjective, et soit $a \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire de l'ensemble $A := \{f(x), x \geq a\}$. Et si on ne suppose plus f surjective, ou continue ?

Exercice 6 - Soit X une partie majorée de \mathbb{R} . Est-ce que $\sup X \in X$? Est-ce que $\sup X$ est un point d'accumulation de X ? Est-ce un point adhérent à X ?

Exercice 7 - Soient A et B deux sous-ensembles bornés non vides de \mathbb{R} . Comparer $\sup A$, $\inf A$, $\sup B$ et $\inf B$ avec les nombres suivants :

$$\sup(A + B) \quad \sup(A \cup B), \quad \sup(A \cap B), \quad \inf(A \cup B), \quad \inf(A \cap B).$$

Exercice 8 - Montrer que si A est une partie connexe de \mathbb{R} et X est un ensemble tel que $A \subset X \subset \overline{A}$, alors X est connexe.